SOLUCIONES - TRIGONOMETRÍA (1.º BACHILLERATO)

Convenciones
• Los ángulos pueden expresarse en grados o en radianes; aquí se resuelven como aparecen.
• En ecuaciones, se da **solución general** ($k \in \mathbb{Z}$) y, cuando procede, se ordena.
• En identidades, se indican **restricciones de dominio** (valores que anulan denominadores).

---

1) Reducción de ángulos al primer cuadrante

1. $\sin(150^\circ)$

Paso 1. Localiza el ángulo: 150° está en el **II cuadrante**.
Paso 2. Ángulo de referencia: $180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$.
Paso 3. Signo: en II cuadrante, $\sin$ es **positivo**.

$$\sin(150^\circ) = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin(30^\circ) = \frac{1}{2}.$$

---

2. $\cos(210^\circ)$

Paso 1. 210° está en el **III cuadrante**.
Paso 2. Referencia: $210^\circ - 180^\circ = 30^\circ$.
Paso 3. Signo: en III cuadrante, cos es **negativo**.

$$\cos(210^\circ) = \cos(180^\circ + 30^\circ) = -\cos(30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

---

3. $\tan(315^\circ)$

Paso 1. 315° está en el **IV cuadrante**.
Paso 2. Referencia: $360^\circ - 315^\circ = 45^\circ$.
Paso 3. Signo: en IV cuadrante, $\tan$ es **negativa**.

$$\tan(315^\circ) = \tan(360^\circ - 45^\circ) = -\tan(45^\circ) = -1.$$

---

4. $\sin(-240^\circ)$

Paso 1. Usa periodicidad: $\sin(\theta) = \sin(\theta + 360^\circ)$.
$-240^\circ + 360^\circ = 120^\circ$.
Paso 2. 120° está en **II cuadrante**.

Paso 3. Referencia: $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.
Paso 4. Signo: en II, $\sin$ **positivo**.

$$\sin(-240^\circ) = \sin(120^\circ) = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

---

2) Razones trigonométricas a partir de una dada y el cuadrante

1. $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, α en II cuadrante

En II: $\sin > 0$, $\cos < 0$, $\tan < 0$.

Paso 1. Identidad: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}.$$

Paso 2. Signo: en II, $\cos\alpha < 0$

$$\cos\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Paso 3. $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$$\tan\alpha = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}.$$

---

2. $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$, α en III cuadrante

En III: $\sin < 0$, $\cos < 0$, $\tan > 0$.

Paso 1. $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

$$\sin^2\alpha = 1 - \left(-\frac{12}{13}\right)^2 = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169}.$$

Paso 2. Signo: en III, $\sin\alpha < 0$

$$\sin\alpha = -\frac{5}{13}.$$

Paso 3. $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$$\tan\alpha = \frac{-\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}} = \frac{5}{12}.$$

(Opcional) Recíprocas:
$\csc\alpha = -\frac{13}{5}$, $\sec\alpha = -\frac{13}{12}$, $\cot\alpha = \frac{12}{5}$.

---

3. $\tan\alpha = \frac{5}{12}$, α en I cuadrante

En I: todas **positivas**.

Paso 1. Interpreta $\tan\alpha = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}} = \frac{5}{12}$.
Toma catetos: opuesto $= 5$, adyacente $= 12$.

Paso 2. Hipotenusa: $h = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = 13$.

Paso 3. Razones:

$$\sin\alpha = \frac{5}{13}, \qquad \cos\alpha = \frac{12}{13}, \qquad \tan\alpha = \frac{5}{12}.$$

Recíprocas: $\csc\alpha = \frac{13}{5}$, $\sec\alpha = \frac{13}{12}$, $\cot\alpha = \frac{12}{5}$.

---

4. $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$, α en IV cuadrante

En IV: $\sin < 0$, $\cos > 0$, $\tan < 0$.

Paso 1. $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$

$$\cos^2\alpha = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}.$$

Paso 2. Signo: en IV, $\cos\alpha > 0$

$$\cos\alpha = \frac{3}{5}.$$

Paso 3. $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$$\tan\alpha = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}.$$

Recíprocas: $\csc\alpha = -\frac{5}{4}$, $\sec\alpha = \frac{5}{3}$, $\cot\alpha = -\frac{3}{4}$.

---

3) Igualdades trigonométricas (verdadera / falsa)

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Es la **identidad pitagórica**.
✅**Verdadera** para todo x.

---

2. $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

Partimos de $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$ y $\sec x = \frac{1}{\cos x}$.
Entonces $\sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.
✅**Verdadera**, con restricción $\cos x \neq 0$.

---

3. $\dfrac{1 - \cos^2 x}{\sin x} = \sin x$

Usamos $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$:

$$\frac{1 - \cos^2 x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x}{\sin x} = \sin x.$$

✅**Verdadera**, con restricción $\sin x \neq 0$.

---

4. $\dfrac{\sin x}{1 - \cos x} = \dfrac{1 + \cos x}{\sin x}$

Paso 1. Racionaliza el primer miembro:

$$\frac{\sin x}{1 - \cos x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \frac{\sin x(1 + \cos x)}{1 - \cos^2 x}.$$

Paso 2. $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$:

$$\frac{\sin x(1 + \cos x)}{\sin^2 x} = \frac{1 + \cos x}{\sin x}.$$

✅**Verdadera**, con restricciones $\sin x \neq 0$ y $1 - \cos x \neq 0$ (equivale a $\cos x \neq 1$).

---

5. $\tan x + \cot x = \dfrac{1}{\sin x \cos x}$

$$\tan x + \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin x \cos x}.$$

✅**Verdadera**, con $\sin x \neq 0$ y $\cos x \neq 0$.

---

6. $\dfrac{\sin x - \tan x}{1 - \cos x} = -\tan x$

Reescribe $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$:

$$\sin x - \tan x = \sin x - \frac{\sin x}{\cos x} = \sin x\left(1 - \frac{1}{\cos x}\right) = \sin x \frac{\cos x - 1}{\cos x}.$$

Entonces

$$\frac{\sin x - \tan x}{1-\cos x} = \frac{\sin x \frac{\cos x - 1}{\cos x}}{1-\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{\cos x - 1}{1-\cos x}.$$

Pero $\frac{\cos x - 1}{1-\cos x} = -1$. Luego:

$$\frac{\sin x - \tan x}{1-\cos x} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x.$$

✅**Verdadera**, con restricciones: $\cos x \neq 0$ y $\cos x \neq 1$.

---

4) Problemas trigonométricos

A) Triángulos rectángulos

1. Ángulo 30°, hipotenusa 10 cm

En un triángulo 30–60–90:
• Cateto opuesto a 30° = mitad de la hipotenusa: 5 cm.
• Cateto adyacente a 30°: $10\cos 30^\circ = 10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$ cm.

Respuesta: catetos 5 cm y $5\sqrt{3}$ cm.

---

2. Edificio: elevación 45°, distancia 20 m

$$\tan 45^\circ = \frac{h}{20} = 1 \Rightarrow h = 20 \text{ m}.$$

Respuesta: 20 m.

---

3. Escalera: 60° con el suelo, altura 8 m

La escalera es la hipotenusa L.

$$\sin 60^\circ = \frac{8}{L} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow L = \frac{16}{\sqrt{3}} = \frac{16\sqrt{3}}{3} \text{ m}.$$

Respuesta: $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ m.

---

4. Avión: ángulo 12°, recorrido 2 km

Altura $h = 2\sin 12^\circ$ km.

$$h \approx 2\cdot 0.2079 = 0.4158 \text{ km} = 415.8 \text{ m (aprox.)}$$

Respuesta: $h = 2\sin 12^\circ \text{ km} \approx 416 \text{ m}.$

---

5. Acantilado: depresión 18°, distancia horizontal 350 m

El ángulo de depresión equivale al de elevación desde el barco: 18°.

$$\tan 18^\circ = \frac{h}{350} \Rightarrow h = 350 \tan 18^\circ.$$

$$h \approx 350 \cdot 0.3249 = 113.7 \text{ m (aprox.)}$$

Respuesta: $h = 350 \tan 18^\circ \approx 114 \text{ m}.$

B) Triángulos no rectángulos

6. Lados 7 cm y 10 cm, ángulo comprendido 45°. Hallar el tercer lado

Ley de cosenos:

$$c^2 = 7^2 + 10^2 - 2 \cdot 7 \cdot 10 \cos 45^\circ.$$

$$c^2 = 49 + 100 - 140 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 149 - 70\sqrt{2}.$$

$$c = \sqrt{149 - 70\sqrt{2}} \text{ cm } (\approx 7.07 \text{ cm}).$$

---

7. Ángulos 50° y 65°, lado opuesto a 65° es 12 cm

Tercer ángulo: $180 - 50 - 65 = 65^\circ$.
Luego el triángulo tiene dos ángulos iguales (65° y 65°) → los lados opuestos son iguales.

Si el lado opuesto a 65° vale 12, el lado opuesto al otro 65° también vale 12.

Para el lado opuesto a 50°: ley de senos

$$\frac{a}{\sin 50^\circ} = \frac{12}{\sin 65^\circ} \Rightarrow a = 12 \frac{\sin 50^\circ}{\sin 65^\circ}.$$

Aproximación: $a \approx 12 \cdot \frac{0.7660}{0.9063} \approx 10.14$ cm.

Respuesta: dos lados 12 cm y el tercero $12 \frac{\sin 50^\circ}{\sin 65^\circ} \approx 10.14$ cm.

---

8. Lados 8 cm, 11 cm, 14 cm. Hallar el ángulo opuesto al lado mayor (14)

Sea C el ángulo opuesto a 14. Ley de cosenos:

\cos C=\frac{8^2+11^2-14^2}{2\cdot8\cdot11}= rac{64+121-196}{176}=\frac{-11}{176}.

$$C = \arccos\left(-\frac{11}{176}\right) \approx 93.6^\circ.$$

Respuesta: $C \approx 93.6^\circ$.

---

9. Terreno: lados 120 m y 95 m con ángulo comprendido 72°. Hallar área

Área con dos lados y ángulo incluido:

$$A = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}(120)(95)\sin 72^\circ.$$

$$A = 5700\sin 72^\circ \approx 5700 \cdot 0.9511 \approx 5421\ \mathrm{m}^2.$$

Respuesta: $A = 5700\sin 72^\circ \approx 5421\ \mathrm{m}^2$.

---

10. $a = 9$, $b = 12$, $\angle A = 40^\circ$. Número de soluciones y resolución

Caso SSA (dos lados y un ángulo no comprendido) → puede haber 0, 1 o 2 soluciones.

Paso 1. Ley de senos:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \sin B = \frac{b\sin A}{a}.$$

$$\sin B = \frac{12\sin 40^\circ}{9} = \frac{4}{3}\sin 40^\circ.$$

Aproximación: $\sin 40^\circ \approx 0.6428 \Rightarrow \sin B \approx 0.8571$.

Como $0 < \sin B < 1$, hay **dos posibles** ángulos:

$$B_1 = \arcsin(0.8571) \approx 59.0^\circ, \quad B_2 = 180^\circ - 59.0^\circ \approx 121.0^\circ.$$

Ambos son compatibles con $A = 40^\circ$ porque $40 + 121 < 180$ y $40 + 59 < 180$. ⇒ **2 soluciones**.

Solución 1: $B \approx 59.0^\circ$
$C = 180 - 40 - 59 = 81^\circ$.
Luego

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} \Rightarrow c = \frac{a\sin C}{\sin A} = \frac{9\sin 81^\circ}{\sin 40^\circ} \approx \frac{9 \cdot 0.9903}{0.6428} \approx 13.86.$$

Solución 2: $B \approx 121.0^\circ$
$C = 180 - 40 - 121 = 19^\circ$.

$$c = \frac{9\sin 19^\circ}{\sin 40^\circ} \approx \frac{9 \cdot 0.3256}{0.6428} \approx 4.56.$$

Respuesta: 2 triángulos posibles:
1) $B \approx 59^\circ,\ C \approx 81^\circ,\ c \approx 13.86$.
2) $B \approx 121^\circ,\ C \approx 19^\circ,\ c \approx 4.56$.

---

5) Ecuaciones trigonométricas

1. $\sin x = \frac{1}{2}$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{o} \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi.$$

---

2. $\cos x = -1$

$$x = \pi + 2k\pi.$$

---

3. $\tan x = 1$

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

---

4. $2\sin x - 1 = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2}$

Misma que la 1:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{o} \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi.$$

---

5. $\cos 2x = 0$

$$2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}.$$

---

6. $\sin x = \cos x$

$$\tan x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

---

7. $2\sin^2 x - 1 = 0$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}.$$

(Equivalente: $x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ + $2k\pi$).

---

8. $\sin 2x = 0$

$$2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}.$$

---

9. $\cos x = \sin 2x$

Usa $\sin 2x = 2\sin x \cos x$:

$$\cos x = 2\sin x \cos x.$$

Pasa todo a un lado:

$$\cos x(1 - 2\sin x) = 0.$$

Casos:

Caso 1: $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Caso 2: $1 - 2\sin x = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ o $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$.

Solución general:

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{o} \quad x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{o} \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi.$$

---

10. $\tan x = \sqrt{3}$

$$x = \frac{\pi}{3} + k\pi.$$

---

6) Sistemas de ecuaciones trigonométricas

1. $\begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \cos x > 0 \end{cases}$

De $\sin x = \frac{1}{2}$:
$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ o $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$.
La condición $\cos x > 0$ selecciona cuadrantes I y IV.
$\frac{\pi}{6}$ está en I → válido.
$\frac{5\pi}{6}$ está en II → $\cos < 0$ → no válido.

Solución:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi.$$

---

2. $\begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin x > 0 \end{cases}$

De $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$:
$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ o $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ (equiv. $\frac{7\pi}{4} + 2k\pi$).
Condición $\sin x > 0 \rightarrow$ cuadrantes I y II.
$\frac{\pi}{4}$ está en I → válido.
$\frac{7\pi}{4}$ está en IV → $\sin < 0$ → no válido.

Solución:

$$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi.$$

---

3. $\begin{cases} \tan x = 1 \\ \sin x < 0 \end{cases}$

De $\tan x = 1$: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.
Comprueba signo de sin:

• Si k par → $x = \frac{\pi}{4} + 2m\pi$ (I cuadrante) → $\sin > 0$ (no vale).
• Si k impar → $x = \frac{\pi}{4} + (2m+1)\pi = \frac{5\pi}{4} + 2m\pi$ (III cuadrante) → $\sin < 0$ (vale).

Solución:

$$x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi.$$

---

4. $\begin{cases} \sin x + \cos x = \sqrt{2} \\ \sin x > 0 \end{cases}$

Usa identidad:

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Entonces:

$$\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

$$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi.$$

Comprueba $\sin x > 0$: para $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, sí.

Solución:

$$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi.$$

5. $\begin{cases} \sin 2x = 0 \\ \cos x < 0 \end{cases}$

De $\sin 2x = 0$:

$$2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}.$$

Ahora impone $\cos x < 0$: ocurre en II y III cuadrantes, es decir para ángulos:

$$x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2m\pi,\ \frac{3\pi}{2} + 2m\pi\right).$$

De los valores $x = \frac{k\pi}{2}$, los que caen ahí son: $x = \pi + 2m\pi$ y también $x = \frac{\pi}{2} + 2m\pi$? (en $\frac{\pi}{2}$, $\cos = 0$, NO es <0).
En $\frac{3\pi}{2}$, $\cos = 0$, tampoco.

Por tanto, solo:

$$x = \pi + 2k\pi.$$

Fin del solucionario