

Hoja de Ejercicios: Álgebra Lineal I

Matrices y Determinantes - Preparación PAU 2026

Departamento de Matemáticas

Introducción: Organización y Transformación de Datos

En el marco de la PAU 2026, las matrices se presentan como la estructura fundamental para el manejo de datos multidimensionales. El objetivo es que el alumno no solo domine el cálculo operativo, sino que sea capaz de interpretar el significado de las operaciones (suma, producto, inversa) y utilice el determinante como una herramienta de diagnóstico sobre la viabilidad y la independencia de la información tratada.

Ejercicios de Matrices y Determinantes

Ejercicio 1: Gestión de Suministros (Interpretación del Producto)

Una empresa de tecnología fabrica tres modelos de portátiles (A, B y C) en dos factorías (F1 y F2). La producción semanal se organiza en la matriz P :

$$P = \begin{pmatrix} 100 & 150 & 80 \\ 120 & 100 & 90 \end{pmatrix}$$

Los costes de producción por unidad y los precios de venta (en euros) se recogen en la matriz C :

$$C = \begin{pmatrix} 400 & 700 \\ 600 & 900 \\ 800 & 1200 \end{pmatrix}$$

- (a) Calcula la matriz $M = P \cdot C$.
- (b) Explica razonadamente qué representan los elementos m_{11} y m_{22} de la matriz resultante.
- (c) Define una matriz D tal que, al restarla o sumarla, permita obtener una matriz con los beneficios brutos por factoría y tipo de gasto.

Ejercicio 2: Criptografía y Seguridad (Matriz Inversa)

Un código de seguridad de tres valores se cifra utilizando la matriz

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. El proceso de cifrado es $Y = A \cdot X$, donde X es el mensaje original.

- (a) Demuestra que existe la matriz A^{-1} calculando su determinante.
- (b) Obtén la matriz de descifrado A^{-1} .

- (c) Si el servidor recibe el mensaje cifrado $Y = \begin{pmatrix} 15 \\ 7 \\ 18 \end{pmatrix}$, recupera el mensaje original X realizando un producto matricial.

Ejercicio 3: Dinámica de Poblaciones (Potencias de Matrices)

Un estudio de mercado analiza el flujo de usuarios entre dos redes sociales, A y B.

Cada mes, el trasvase se rige por la matriz de transición $T = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{pmatrix}$.

- (a) Si inicialmente hay 5000 usuarios en cada red, calcula la distribución tras dos meses utilizando T^2 .
- (b) Calcula la matriz T^2 y explica el significado del elemento $(t^2)_{21}$ en el contexto de la migración de usuarios.
- (c) Justifica por qué la suma de las columnas de cualquier potencia de T siempre será igual a 1.

Ejercicio 4: Redes de Transporte (Matrices de Adyacencia)

Una empresa logística tiene 4 centros de distribución conectados. La matriz A representa las conexiones directas ($a_{ij} = 1$ si están conectados, 0 si no):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Calcula A^2 .
- (b) Interpreta qué información proporciona el elemento $(a^2)_{14}$ sobre las rutas entre el centro 1 y el centro 4.
- (c) Razona si es posible ir de cualquier centro a otro con un máximo de una escala.

Ejercicio 5: Logística y Redundancia (Rango de Matrices)

Un sistema de sensores de temperatura en un almacén envía datos que se organizan en la siguiente matriz, donde k es un factor de calibración:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & k \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & k & 3 \end{pmatrix}$$

- (a) Determina para qué valores de k la información enviada por los sensores es independiente (rango máximo).
- (b) Si $k = 3$, ¿qué relación existe entre las filas de la matriz? Explica qué significa esto en términos de redundancia de datos para la empresa.

Ejercicio 6: Propiedades del Determinante (Análisis Simbólico)

En un proceso de simulación, se trabaja con una matriz cuadrada M de orden 3 tal que su determinante es $|M| = -2$.

- (a) Calcula, justificando la propiedad utilizada en cada paso: $|M^{-1}|$, $|M^4|$ y $|-5M|$.
- (b) Si existe una matriz N tal que $M \cdot N = I$, ¿cuál es el valor del determinante de N ?

Ejercicio 7: Ecuaciones Matriciales (Resolución de Incógnitas)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, se desea encontrar una matriz X que verifique la relación:

$$A \cdot X \cdot A^{-1} = B$$

- (a) Despeja la matriz X en la ecuación anterior.
- (b) Calcula la matriz X paso a paso.
- (c) Justifica si el determinante de X debe ser igual al determinante de B .

Ejercicio 8: Diseño Industrial (Matrices de Transformación)

Un programa de diseño arquitectónico aplica una transformación a las coordenadas de una estructura mediante la matriz $H = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- (a) Si aplicamos esta transformación a un cuadrado de área 4 unidades, ¿cuál será el área de la figura resultante en función de k ? (Utiliza la relación entre el determinante y el área).
- (b) Si queremos que la transformación no altere el área de las figuras, ¿qué valor debe tomar el determinante de H ?
- (c) Calcula H^n y explica qué efecto acumulado tiene aplicar esta transformación n veces sobre la estructura.

Guía Estratégica para la PAU 2026

Operación	Utilidad Competencial
Producto $A \cdot B$	Relacionar categorías de datos (ej. Cantidades $\times$ Precios).
Inversa A^{-1}	Revertir procesos de transformación o descifrado de información.
Determinante	Medir el factor de escala de una transformación o verificar la independencia de los datos.
Potencia A^n	Predecir la evolución de un sistema a largo plazo (modelos de transición).
Rango	Detectar si hay sensores o rutas duplicadas/redundantes en un sistema.