Soluciones paso a paso - Teoremas

1) Teorema de Bolzano

Función: $f(x) = x^3 - 4x^2 + 1$. **Intervalo:** $[0, 2]$.

a) Hipótesis de Bolzano 1. Es un polinomio $\Rightarrow$ es **continua** en todo $\mathbb{R}$, en particular en $[0, 2]$.

b) ¿Hay al menos una raíz? 1. Calculamos los valores en los extremos: - $f(0) = 0^3 - 4 \cdot 0^2 + 1 = 1$ - $f(2) = 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 1 = 8 - 16 + 1 = -7$ 2. Observa que $f(0) > 0$ y $f(2) < 0$: **cambia de signo**. 3. Por Bolzano, **existe al menos una raíz** $c \in (0, 2)$ tal que $f(c) = 0$.

---

2) Teorema de Bolzano

Función: $f(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{2}$. **Intervalo:** $[0, 2]$.

a) Hipótesis de Bolzano 1. $\ln(x+1)$ es continua para $x > -1$. En $[0, 2]$ está definida. 2. $\frac{x}{2}$ es continua. 3. Resta de continuas $\Rightarrow f$ es **continua** en $[0, 2]$.

b) ¿Hay al menos una raíz? 1. Calculamos: - $f(0) = \ln(1) - 0 = 0$ 2. Si en un extremo ya vale 0, entonces **ya tenemos una raíz**.

✅Conclusión: **sí**, existe al menos una raíz en $[0, 2]$: $x = 0$.

---

3) Teorema de Rolle

Función: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$. **Intervalo:** $[1, 3]$.

Paso 1: Continuidad y derivabilidad - Es un polinomio $\Rightarrow$ continua y derivable en todo $\mathbb{R}$.

Paso 2: Comprobar si $f(1) = f(3)$ - $f(1) = 1 - 6 + 9 + 2 = 6$ - $f(3) = 27 - 54 + 27 + 2 = 2$

Como $6 \neq 2$, **NO se cumple** la condición $f(1) = f(3)$.

❌Conclusión: **NO se puede aplicar Rolle** en $[1, 3]$. (No hay que buscar c).

---

4) Teorema de Rolle

Función: $f(x) = \sqrt{x+1} - x$. **Intervalo:** $[0, 3]$.

Paso 1: Continuidad y derivabilidad - $\sqrt{x+1}$ es continua para $x \geq -1$ y derivable para $x > -1$. - En $[0, 3]$ no hay problema. f es continua y derivable.

Paso 2: Comprobar si $f(0) = f(3)$ - $f(0) = \sqrt{1} - 0 = 1$ - $f(3) = \sqrt{4} - 3 = 2 - 3 = -1$

Como $1 \neq -1$, **NO se cumple** $f(0) = f(3)$.

❌Conclusión: **NO se puede aplicar Rolle** en $[0, 3]$.

---

5) Teorema del Valor Medio (TVM)

Función: $f(x) = x^2 - 3x + 1$. **Intervalo:** $[1, 4]$.

a) Hipótesis del TVM - Polinomio $\Rightarrow$ continua en $[1, 4]$ y derivable en $(1, 4)$.

b) Hallar c 1. Pendiente de la recta secante:

$$\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1}$$

2. Calculamos: - $f(4) = 16 - 12 + 1 = 5$ - $f(1) = 1 - 3 + 1 = -1$

$$\frac{5 - (-1)}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

3. Derivada:

$$f'(x) = 2x - 3$$

4. Igualamos a 2:

$$2x - 3 = 2 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

✅Conclusión: $c = \frac{5}{2}$.

---

6) Teorema del Valor Medio (TVM)

Función: $f(x) = \ln(x + 2)$. **Intervalo:** $[0, 2]$.

a) Hipótesis del TVM - $\ln(x + 2)$ está definida para $x > -2 \Rightarrow$ en $[0, 2]$ está perfecta. - Es continua en $[0, 2]$ y derivable en $(0, 2)$.

b) Hallar c 1. Pendiente secante:

$$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{\ln(4) - \ln(2)}{2}$$

2. Simplificamos:

$$\ln(4) - \ln(2) = \ln\left(\frac{4}{2}\right) = \ln(2)$$

Entonces:

$$\frac{f(2)-f(0)}{2}=\frac{\ln(2)}{2}$$

3. Derivada:

$$f'(x)=\frac{1}{x+2}$$

4. Igualamos:

$$\frac{1}{c+2}=\frac{\ln(2)}{2}\Rightarrow c+2=\frac{2}{\ln(2)}\Rightarrow c=\frac{2}{\ln(2)}-2$$

✅Conclusión: $c=\dfrac{2}{\ln(2)}-2$ (y está entre 0 y 2).

---

7) Aplicación de Bolzano

Función: $f(x)=x^5-5x+1$. **Intervalo:** $[0,1]$.

1. Es un polinomio $\Rightarrow$ **continua** en $[0,1]$.
2. Valores en extremos:
3. $f(0)=1$ (positivo)
4. $f(1)=1-5+1=-3$ (negativo)
5. Cambia de signo $\Rightarrow$ por Bolzano existe $c\in(0,1)$ con $f(c)=0$.

✅Conclusión: la ecuación **tiene al menos una solución** en $[0,1]$.

---

8) Aplicación de Rolle

Función: $f(x)=x^4-4x^2+3$. **Intervalo:** $[-1,1]$.

Paso 1: Hipótesis - Polinomio $\Rightarrow$ continua en $[-1,1]$ y derivable en $(-1,1)$.

Paso 2: Comprobar $f(-1)=f(1)$ - $f(-1)=1-4+3=0$ - $f(1)=1-4+3=0$

Se cumple $f(-1)=f(1)\Rightarrow$ **sí aplica Rolle**.

Paso 3: Hallar c con $f'(c)=0$ 1. Derivada:

$$f'(x)=4x^3-8x=4x(x^2-2)$$

2. Igualamos a 0:

$$4x(x^2-2)=0\Rightarrow x=0 \text{ o } x^2=2\Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$$

3. En $(-1,1)$ solo entra $x=0$ (porque $\pm\sqrt{2}\approx\pm1{,}414$ están fuera).

✅Conclusión: $c = 0$.

---

9) Aplicación del Teorema del Valor Medio

Función: $f(x) = \sqrt{x+4}$. **Intervalo:** $[0, 5]$.

a) Hipótesis - $\sqrt{x+4}$ está definida para $x \geq -4 \Rightarrow$ en $[0, 5]$ está bien. - Es continua en $[0, 5]$ y derivable en $(0, 5)$.

b) Hallar c 1. Pendiente secante:

$$\frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = \frac{\sqrt{9} - \sqrt{4}}{5} = \frac{3 - 2}{5} = \frac{1}{5}$$

2. Derivada:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+4}}$$

3. Igualamos:

$$\frac{1}{2\sqrt{c+4}} = \frac{1}{5} \Rightarrow 2\sqrt{c+4} = 5 \Rightarrow \sqrt{c+4} = \frac{5}{2}$$

4. Elevamos al cuadrado:

$$c + 4 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} \Rightarrow c = \frac{25}{4} - \frac{16}{4} = \frac{9}{4}$$

✅Conclusión: $c = \frac{9}{4}$.