Soluciones: Campo Eléctrico

Nota: Los ejercicios están listados en el orden en que aparecen en el documento original. Para los cálculos, se ha tomado $K = 9 \cdot 10^9\,\mathrm{N \cdot m^2/C^2}$ y $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$ (salvo que el enunciado indique lo contrario).

Página 1

Ejercicio 2. Cargas puntuales

a) No, el campo eléctrico nunca puede anularse en un punto próximo a dos cargas de igual valor y signo contrario. En la región entre ellas, los vectores campo eléctrico de ambas apuntan en el mismo sentido, por lo que se suman. En el exterior de ellas, el campo de la carga más cercana siempre domina sobre la más lejana, impidiendo que la suma vectorial sea cero.
b) Puntos: $A(0,0)$ y $B(2,0)$. Potencial en $C(1,1)$ es $V_C = 1000\,\mathrm{V}$.

- **i) Valor de la carga:** La distancia de A a C es $r_{AC} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}\,\mathrm{m}$. La de B a C es $r_{BC} = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}\,\mathrm{m}$.

$$V_C = K\frac{q}{r_{AC}} + K\frac{q}{r_{BC}} \implies 1000 = 9\cdot 10^9\left(\frac{q}{\sqrt{2}} + \frac{q}{\sqrt{2}}\right) = 9\cdot 10^9\frac{2q}{\sqrt{2}}$$

  Despejando: $q = \frac{1000\cdot\sqrt{2}}{18\cdot 10^9} \approx 7.86\cdot 10^{-8}\,\mathrm{C}$.

- **ii) Vector campo en C:** Las componentes X de ambos campos se anulan por simetría. Las componentes Y se suman.

$$E_{Cy} = 2\cdot E_A\cdot \sin(45^\circ) = 2\cdot\left(9\cdot 10^9\frac{7.86\cdot 10^{-8}}{(\sqrt{2})^2}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 500\,\mathrm{V/m} \implies \vec{E}_C = 500\vec{j}\,\mathrm{N/C}$$

Ejercicio 3. Cargas puntuales

a)

- **i)** Por conservación de la energía mecánica: $\Delta K + \Delta U = 0 \implies K_f = U_i - U_f$.

$$\frac{1}{2}mv^2 = K\frac{q^2}{d} - K\frac{q^2}{2d} = K\frac{q^2}{2d} \implies v = \sqrt{\frac{Kq^2}{md}}$$

- **ii)** Si se duplica el valor de las cargas ($q' = 2q$), la nueva velocidad será:

$$v' = \sqrt{\frac{K(2q)^2}{md}} = \sqrt{4\frac{Kq^2}{md}} = 2\sqrt{\frac{Kq^2}{md}} = 2v$$

  El módulo de la velocidad se duplicaría.

b) Cargas fijas $q = 5\cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}$ en $(0,-3)$ y $(0,3)$. Partícula $Q = -2\cdot 10^{-8}\,\mathrm{C}$ y $m = 8\cdot 10^{-6}\,\mathrm{kg}$ viaja de $(4,0)$ a $(0,0)$.

- V_i en $(4,0)$: La distancia a ambas cargas es $r_i = \sqrt{4^2+3^2} = 5$ m.

$$V_i = 2 \cdot \left(9 \cdot 10^9 \frac{5 \cdot 10^{-6}}{5}\right) = 18000\,\text{V}$$

- V_f en $(0,0)$: La distancia es $r_f = 3$ m.

$$V_f = 2 \cdot \left(9 \cdot 10^9 \frac{5 \cdot 10^{-6}}{3}\right) = 30000\,\text{V}$$

- Trabajo del campo: $W = -\Delta U = -Q(V_f - V_i) = -(-2 \cdot 10^{-8})(30000 - 18000) = 2.4 \cdot 10^{-4}$ J.
- Velocidad: $W = \Delta K \implies 2.4 \cdot 10^{-4} = \frac{1}{2}(8 \cdot 10^{-6})v^2 \implies v = \sqrt{60} \approx 7.75$ m/s.

Ejercicio 4. Cargas puntuales

a) El electrón ($q < 0$) experimenta una fuerza eléctrica en sentido contrario al campo $\vec{E}$ (y a su velocidad). Esto provoca una aceleración negativa, por lo que su energía cinética disminuye hasta detenerse, transformándose en energía potencial eléctrica.

$$\Delta K = W_{\text{elec}} \implies 0 - \frac{1}{2}mv^2 = q\Delta V = (-e)(-E \cdot d) = eEd$$

$$d = \frac{mv^2}{2eE} = \frac{9.1 \cdot 10^{-31} \cdot (10^6)^2}{2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 400} \approx 0.0071\,\text{m} = 7.1\,\text{mm}$$

b) Si fuera un positrón ($q > 0$), la fuerza apuntaría en el mismo sentido que $\vec{E}$ y que su velocidad. El positrón se aceleraría continuamente, incrementando su energía cinética a costa de reducir su energía potencial; por lo tanto, no se detendría nunca.

Ejercicio 2 (Bis). Péndulo

Datos: $m = 0.002$ kg, $\theta = 15°$, $E = 1000$ N/C, $g = 10$ m/s^2.
a) En equilibrio, las componentes de la tensión T se igualan al peso y a la fuerza eléctrica:

$$T \sin\theta = qE \quad \text{y} \quad T\cos\theta = mg \implies \tan\theta = \frac{qE}{mg}$$

$$q = \frac{mg\tan\theta}{E} = \frac{0.002 \cdot 10 \cdot \tan(15°)}{1000} \approx 5.36 \cdot 10^{-6}\,\text{C}$$

b) Al aplicar el campo, la carga se desplaza en la misma dirección de las líneas de campo eléctrico. El campo realiza un trabajo positivo sobre la carga, por lo que su **energía potencial eléctrica disminuye** ($\Delta U_e = -qEx = -qEL\sin\theta$). Dicha energía se transforma en energía potencial gravitatoria al elevarse la bolita.

Página 2

Ejercicio 5. Cargas puntuales

a) Al soltarse desde el reposo y sufrir una fuerza en el sentido de OY, la partícula sigue un **Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado (MRUA)** a lo largo del eje Y positivo. Durante el movimiento, el campo realiza un trabajo positivo, por lo que su **energía potencial eléctrica disminuye transformándose íntegramente en energía cinética**.
b) Diferencia de potencial $\Delta V = V_f - V_i = -E \cdot \Delta y$:

$$\Delta V = -500 \cdot 2 = -1000\,\text{V}$$

El trabajo realizado es $W = -q\Delta V = -(2 \cdot 10^{-6})(-1000) = 2 \cdot 10^{-3}$ J.

Ejercicio 2. Esferas conductoras

Datos: $R_1 = 0.025$ m, $q_1 = 3 \cdot 10^{-6}$ C; $R_2 = 0.04$ m, $q_2 = -6 \cdot 10^{-6}$ C; $d = 0.2$ m. **a)**

$$V_1 = K\frac{q_1}{R_1} = 9 \cdot 10^9 \frac{3 \cdot 10^{-6}}{0.025} = 1.08 \cdot 10^6 \text{ V}$$

$$V_2 = K\frac{q_2}{R_2} = 9 \cdot 10^9 \frac{-6 \cdot 10^{-6}}{0.04} = -1.35 \cdot 10^6 \text{ V}$$

Fuerza: $F = K\frac{|q_1 q_2|}{d^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{(3 \cdot 10^{-6})(6 \cdot 10^{-6})}{0.2^2} = 4.05$ N (**Atractiva**).
b y c) Al conectarse, la carga se redistribuye hasta que los potenciales se igualan ($V_1' = V_2'$):

$$K\frac{q_1'}{R_1} = K\frac{q_2'}{R_2} \implies q_1' = \frac{R_1}{R_2}q_2' = \frac{0.025}{0.04}q_2' = 0.625q_2'$$

Por conservación de la carga: $Q_{total} = q_1 + q_2 = 3\mu\text{C} - 6\mu\text{C} = -3\mu\text{C}$.

$$q_1' + q_2' = -3\mu\text{C} \implies 0.625q_2' + q_2' = -3 \implies 1.625q_2' = -3 \implies q_2' = -1.846\,\mu\text{C}$$

$$q_1' = -3 - (-1.846) = -1.154\,\mu\text{C}$$

El potencial final será: $V' = 9 \cdot 10^9 \frac{-1.154 \cdot 10^{-6}}{0.025} = -4.15 \cdot 10^5$ V.

Ejercicio 3. Esferas conductoras

a) Carga de esfera 1 ($R_1 = 0.2$ m, $V_1 = 50$ V):

$$q_1 = \frac{V_1 R_1}{K} = \frac{50 \cdot 0.2}{9 \cdot 10^9} = 1.11 \cdot 10^{-9} \text{ C} = 1.11 \text{ nC}$$

Potencial inicial de esfera 2 ($R_2 = 0.3$ m, $q_2 = -3$ nC):

$$V_{2i} = 9 \cdot 10^9 \frac{-3 \cdot 10^{-9}}{0.3} = -90 \text{ V}$$

b) Fuerza (Atractiva porque tienen distinto signo):

$$F = K\frac{|q_1 q_2|}{d^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{(1.11 \cdot 10^{-9})(3 \cdot 10^{-9})}{3^2} = 3.33 \cdot 10^{-9} \text{ N}$$

Dirección de la línea que las une, sentido hacia la otra esfera.
c) Conexión: igualan potencial ($V_1' = V_2'$).

$$q_1' = \frac{R_1}{R_2}q_2' = \frac{0.2}{0.3}q_2' = \frac{2}{3}q_2'$$

Carga total: $Q_{tot} = 1.11 - 3 = -1.89$ nC.

$$\frac{2}{3}q_2' + q_2' = -1.89 \implies \frac{5}{3}q_2' = -1.89 \implies q_2' = -1.134 \text{ nC}; \quad q_1' = -0.756 \text{ nC}$$

Potencial final: $V' = 9 \cdot 10^9 \frac{-0.756 \cdot 10^{-9}}{0.2} = -34.02$ V.

Ejercicio 6. Cargas puntuales

Datos: $q_1 = q_2 = 10\mu$C. Posiciones: base $a = 6$ cm, altura $h = 4$ cm. Distancia de P(centro base) a vértices: $r_i = 3$ cm $= 0.03$ m. Distancia del vértice superior a base: $r_f = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ cm $= 0.05$ m. $q_3 = 50\mu$C.
a) Energía potencial $U = q_3 V$:

$$U_i \text{ (en P)} = 50 \cdot 10^{-6} \left(2 \cdot 9 \cdot 10^9 \frac{10 \cdot 10^{-6}}{0.03} \right) = 50 \cdot 10^{-6} \cdot 6 \cdot 10^6 = 300\,\text{J}$$

$$U_f \text{ (vértice)} = 50 \cdot 10^{-6} \left(2 \cdot 9 \cdot 10^9 \frac{10 \cdot 10^{-6}}{0.05} \right) = 50 \cdot 10^{-6} \cdot 3.6 \cdot 10^6 = 180\,\text{J}$$

b) Fuerza en P: $\vec{F}_i = 0$ N (se anulan por simetría en el centro).
Fuerza en el vértice: Las componentes horizontales se anulan. Solo sobrevive el eje Y con $\cos\theta = \frac{4}{5} = 0.8$.

$$F_f = 2 \cdot K \frac{q_1 q_3}{r_f^2} \cos\theta = 2 \cdot 9 \cdot 10^9 \frac{(10 \cdot 10^{-6})(50 \cdot 10^{-6})}{0.05^2} \cdot 0.8 = 2880\,\text{N} \implies \vec{F}_f = 2880\vec{j}\,\text{N}$$

c) Velocidad ($m = 2.4 \cdot 10^{-3}$ kg): Por conservación de la energía $\Delta K = -\Delta U = U_i - U_f$.

$$\frac{1}{2} m v^2 = 300 - 180 = 120\,\text{J} \implies v = \sqrt{\frac{240}{0.0024}} = 316.23\,\text{m/s}$$

Página 3

Ejercicio 7. Cargas puntuales

$q_1 = 2$ mC en $(0, 2)$cm; $q_2 = -1$ mC en $(0, 0)$; $q_3 = -5$ mC en $A(6, 0)$cm.
a) U_3 en A: distancias son $r_{23} = 0.06$ m, $r_{13} = \sqrt{0.06^2 + 0.02^2} = 0.0632$ m.

$$V_A = 9 \cdot 10^9 \left(\frac{2 \cdot 10^{-3}}{0.0632} + \frac{-1 \cdot 10^{-3}}{0.06} \right) = 2.848 \cdot 10^8 - 1.5 \cdot 10^8 = 1.348 \cdot 10^8\,\text{V}$$

$$U_3 = q_3 V_A = -5 \cdot 10^{-3} \cdot 1.348 \cdot 10^8 = -6.74 \cdot 10^5\,\text{J}$$

b) Fuerza sobre q_2 (en el origen): $\vec{F}_{12}$ va en $+y$ (atractiva): $F_{12} = 9 \cdot 10^9 \frac{(2 \cdot 10^{-3})(1 \cdot 10^{-3})}{0.02^2} = 4.5 \cdot 10^7$ N. $\vec{F}_{32}$ va en $-x$ (repulsiva): $F_{32} = 9 \cdot 10^9 \frac{(5 \cdot 10^{-3})(1 \cdot 10^{-3})}{0.06^2} = 1.25 \cdot 10^7$ N.

$$\vec{F}_2 = -1.25 \cdot 10^7 \vec{i} + 4.5 \cdot 10^7 \vec{j}\,\text{N} \implies |\vec{F}_2| = \sqrt{(1.25)^2 + (4.5)^2} \cdot 10^7 = 4.67 \cdot 10^7\,\text{N}$$

c) Trabajo de A a B$(6, 2)$cm. Potencial en B ($r_{1B} = 0.06$ m, $r_{2B} = 0.0632$ m):

$$V_B = 9 \cdot 10^9 \left(\frac{2 \cdot 10^{-3}}{0.06} + \frac{-1 \cdot 10^{-3}}{0.0632} \right) = 3 \cdot 10^8 - 1.424 \cdot 10^8 = 1.576 \cdot 10^8\,\text{V}$$

$$U_{3,B} = -5 \cdot 10^{-3} \cdot 1.576 \cdot 10^8 = -7.88 \cdot 10^5\,\text{J}$$

$$W_{\text{ext}} = \Delta U = U_{3,B} - U_{3,A} = -7.88 \cdot 10^5 - (-6.74 \cdot 10^5) = -1.14 \cdot 10^5\,\text{J}$$

Como el trabajo externo es negativo, significa que es el propio campo eléctrico el que realiza el esfuerzo (trabajo positivo del campo). Por lo tanto, **no** sería necesaria una fuerza externa para forzar el movimiento, ya que tendería a hacerlo de forma espontánea.

Ejercicio 1. Cargas puntuales

A(-1,0), B(2,0), C(1,2). $q_A = 2\mu$C, $q_B = 2\mu$C. Potencial en $(0,1) = 1685.9$ V.
a) Distancias a $(0,1)$: $r_A = \sqrt{2}$, $r_B = \sqrt{5}$, $r_C = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$.

$$V = K\left(\frac{q_A}{r_A} + \frac{q_B}{r_B} + \frac{q_C}{r_C}\right) \implies 1685.9 = 9\cdot 10^9\left(\frac{2\cdot 10^{-6}}{\sqrt{2}} + \frac{2\cdot 10^{-6}}{\sqrt{5}} + \frac{q_C}{\sqrt{2}}\right)$$

$$1685.9 = 12727.9 + 8049.8 + \frac{9\cdot 10^9}{\sqrt{2}}q_C \implies -19091.8 = 6.364\cdot 10^9\cdot q_C \implies q_C = -3\cdot 10^{-6}\,\text{C}$$

b) Trabajo para mover 5μC desde $(0,1)$ hasta $(1,0)$:
Potencial en $(1,0)$ con $r'_A = 2$, $r'_B = 1$, $r'_C = 2$:

$$V(1,0) = 9\cdot 10^9\left(\frac{2\cdot 10^{-6}}{2} + \frac{2\cdot 10^{-6}}{1} + \frac{-3\cdot 10^{-6}}{2}\right) = 9000(1+2-1.5) = 13500\,\text{V}$$

$$W_{\text{ext}} = \Delta U = q\Delta V = 5\cdot 10^{-6}(13500 - 1685.9) = 0.059\,\text{J}$$

El signo positivo indica que hay que aportar energía desde el exterior, ya que la carga va hacia una zona de mayor potencial (y como es positiva, "le cuesta" ir hacia allá de forma natural).
c) Campo eléctrico en $(1,0)$: $\vec{E}_A = 9\cdot 10^9\frac{2\cdot 10^{-6}}{2^2}\vec{i} = 4500\vec{i}$. $\vec{E}_B = 9\cdot 10^9\frac{2\cdot 10^{-6}}{1^2}(-\vec{i}) = -18000\vec{i}$. $\vec{E}_C = 9\cdot 10^9\frac{3\cdot 10^{-6}}{2^2}(-\vec{j}) = -6750\vec{j}$.

$$\vec{E}_{tot} = (4500 - 18000)\vec{i} - 6750\vec{j} = -13500\vec{i} - 6750\vec{j}\,\text{N/C}$$

Página 4 y 5

Ejercicio 1. Péndulo

$m = 0.5$ g $= 5\cdot 10^{-4}$ kg. Campo hacia arriba, hilo tensado desde abajo.
a) Sobre la bolita actúan la gravedad (hacia abajo) y la tensión (hacia abajo, porque el hilo "tira" de ella). Para que haya equilibrio, la fuerza eléctrica debe apuntar **hacia arriba**. Como el campo va hacia arriba, la carga debe ser **positiva**.
b) $\sum F_y = 0 \implies F_e - mg - T = 0 \implies qE = mg + T$.

$$q(2500) = (5\cdot 10^{-4})(9.8) + 10^{-2} = 0.0049 + 0.01 = 0.0149 \implies q = \frac{0.0149}{2500} = 5.96\cdot 10^{-6}\,\text{C}$$

c) El hilo solo soporta tracción ($T \geq 0$). Si reducimos E, la fuerza eléctrica sube menos y la tensión requerida baja. El límite es cuando $T = 0$:

$$qE_{min} = mg \implies E_{min} = \frac{0.0049}{5.96\cdot 10^{-6}} \approx 822\,\text{V/m}$$

Ejercicio 1. Esferas conductoras

$R_1 = 0.9\,\text{m}, V_1 = 10\,\text{V} \implies q_1 = 10\cdot 0.9/(9\cdot 10^9) = 1\,\text{nC}$.
$R_2 = 0.45\,\text{m}, V_2 = 20\,\text{V} \implies q_2 = 20\cdot 0.45/(9\cdot 10^9) = 1\,\text{nC}$.
Carga total $Q = 2$ nC. Al unirlas, $V'_1 = V'_2 \implies \frac{q'_1}{0.9} = \frac{q'_2}{0.45} \implies q'_1 = 2q'_2$.

$$2q'_2 + q'_2 = 2 \implies 3q'_2 = 2 \implies q'_2 = \frac{2}{3}\,\text{nC}; \quad q'_1 = \frac{4}{3}\,\text{nC}$$

Ejercicio 3. Péndulo

$m = 0.05\,\text{kg}, E = 3000\vec{i}\,\text{V/m}, \theta = 25°$.
a) La bola es desviada hacia la derecha (en el mismo sentido que $\vec{E}$). Por tanto, su carga es **positiva**.
b) Equilibrio: $T\sin\theta = qE$ y $T\cos\theta = mg$.

$$\tan\theta = \frac{qE}{mg} \implies q = \frac{0.05 \cdot 9.8 \cdot \tan 25°}{3000} \approx 7.62 \cdot 10^{-5}\,\text{C}$$

$$T = \frac{mg}{\cos\theta} = \frac{0.49}{\cos 25°} \approx 0.54\,\text{N}$$

c) Si $q = 10\mu\text{C}$ y $\theta = 45°$:

$$E = \frac{mg\tan 45°}{q} = \frac{0.49 \cdot 1}{10^{-5}} = 49000\,\text{V/m}; \quad T = \frac{0.49}{\cos 45°} = 0.69\,\text{N}$$

Ejercicio 4. Esferas conductoras

$R_1 = 5R_2$ y $q_1 = 3q_2$.
a) $V_1 = K\frac{3q_2}{5R_2} = 0.6V_2$. La **esfera 2** tiene mayor potencial (es $1/0.6 = 1.67$ veces mayor).
b) Al conectarlas: $q_1'/5R_2 = q_2'/R_2 \implies q_1' = 5q_2'$. Conservación: $3q_2 + q_2 = 5q_2' + q_2' \implies 4q_2 = 6q_2' \implies q_2' = \frac{2}{3}q_2$.
La esfera 2 pasa de q_2 a $\frac{2}{3}q_2$, perdiendo $\frac{1}{3}q_2$. Cede carga. Esta carga transferida es de $3\mu\text{C}$, luego $\frac{1}{3}q_2 = 3\mu\text{C} \implies q_2 = 9\mu\text{C}$. Por consiguiente, la carga inicial de la esfera 1 era $q_1 = 27\mu\text{C}$.
La **esfera 2 cede** y la **esfera 1 absorbe**.
c) Cociente de fuerzas: $F_i = K\frac{27\cdot 9}{d^2} = K\frac{243}{d^2}$. Tras el contacto, $q_2' = 6\mu\text{C}$ y $q_1' = 30\mu\text{C}$. $F_f = K\frac{30\cdot 6}{d^2} = K\frac{180}{d^2}$.

$$\text{Cociente } \frac{F_i}{F_f} = \frac{243}{180} = 1.35$$

Ejercicio 8. Cargas puntuales

$q_1 = -2\text{nC}$ en $(-5, 0)$, $q_2 = 2\text{nC}$ en $(5, 0)$.
a) Punto A$(5, 4)$. $r_1 = \sqrt{10^2 + 4^2} = \sqrt{116}\,\text{m}$. $r_2 = 4\,\text{m}$.

$$V_A = 9 \cdot 10^9 \left(\frac{-2 \cdot 10^{-9}}{\sqrt{116}} + \frac{2 \cdot 10^{-9}}{4} \right) = 9\,(-0.186 + 0.5) = 2.83\,\text{V}$$

Para el campo en A:

$$\vec{E}_1 = K\frac{q_1}{r_1^3}\vec{r}_1 = 9\frac{-2}{116^{1.5}}(10\vec{i} + 4\vec{j}) = 0.144\vec{i} + 0.058\vec{j}\,\text{N/C}$$

$$\vec{E}_2 = 9\frac{2}{4^2}\vec{j} = 1.125\vec{j}\,\text{N/C}$$

$$\vec{E}_A = 0.144\vec{i} + 1.183\vec{j}\,\text{N/C}$$

b) Punto B$(0, 4)$. $r_{1B} = r_{2B} = \sqrt{41}\,\text{m}$. Por simetría y cargas opuestas, $V_B = 0\,\text{V}$.
Trabajo del campo ($q_0 = 3\text{nC}$):

$$W_{camp} = -q_0(V_B - V_A) = -3 \cdot 10^{-9}(0 - 2.83) = 8.49 \cdot 10^{-9}\,\text{J}$$