



SOLUCIONES - NÚMEROS REALES

1. Intervalos, Entornos y Valor Absoluto

Ejercicio 1. Expresa en forma de intervalo y representa gráficamente el conjunto de valores de x que cumplen la siguiente condición de intersección:

$$\left| \frac{2x-5}{3} \right| \leq 4 \cap |x+1| > 2$$

Parte 1:

$$\left| \frac{2x-5}{3} \right| \leq 4 \implies -4 \leq \frac{2x-5}{3} \leq 4$$

$$-12 \leq 2x-5 \leq 12$$

$$-7 \leq 2x \leq 17 \implies x \in \left[-\frac{7}{2}, \frac{17}{2} \right]$$

Parte 2:

$$|x+1| > 2 \implies x+1 > 2 \quad \cup \quad x+1 < -2$$

$$x > 1 \quad \cup \quad x < -3 \implies x \in (-\infty, -3) \cup (1, \infty)$$

Intersección:

$$\left[-\frac{7}{2}, \frac{17}{2} \right] \cap \{(-\infty, -3) \cup (1, \infty)\}$$

$$\text{Resultado : } x \in \left[-\frac{7}{2}, -3 \right) \cup \left(1, \frac{17}{2} \right]$$

Ejercicio 2. Determina el entorno abierto $E(a, r)$ o la unión de intervalos que equivale a la resolución de la siguiente inecuación racional con valor absoluto:

$$\frac{1}{|x-3|} > \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{|x-3|} > \frac{1}{2} \implies |x-3| < 2 \quad (x \neq 3)$$

$$-2 < x-3 < 2$$

$$1 < x < 5$$

$$x \in (1, 5) \setminus \{3\}$$

Resultado : $(1, 3) \cup (3, 5) \equiv \mathbf{E(3, 2) \setminus \{3\}}$

Ejercicio 3. Expresa como un único entorno o intervalo la intersección de los conjuntos A y B: $A = \{x \in \mathbb{R} : |x-2| < 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : d(x, -1) \leq 4\}$.

$$A : |x-2| < 5 \implies -5 < x-2 < 5 \implies -3 < x < 7 \implies A = (-3, 7)$$

$$B : |x - (-1)| \leq 4 \implies |x+1| \leq 4 \implies -4 \leq x+1 \leq 4 \implies B = [-5, 3]$$

$$A \cap B = (-3, 7) \cap [-5, 3]$$

Resultado : $\mathbf{A \cap B = (-3, 3]}$

2. Potencias y Radicales

Ejercicio 4. Simplifica al máximo dejando el resultado como una sola potencia de exponente fraccionario:

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt[3]{a^2 \cdot \sqrt{a} \cdot (a^{-2})^3}}{\sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[6]{a^{-1}}} \\ &= \frac{(a^2 \cdot a^{1/2})^{1/3} \cdot a^{-6}}{a^{3/4} \cdot a^{-1/6}} = \frac{(a^{5/2})^{1/3} \cdot a^{-6}}{a^{9/12} \cdot a^{-2/12}} \\ &= \frac{a^{5/6} \cdot a^{-36/6}}{a^{7/12}} = \frac{a^{-31/6}}{a^{7/12}} \\ &= a^{-\frac{31}{6} - \frac{7}{12}} = a^{-\frac{62}{12} - \frac{7}{12}} \end{aligned}$$

Resultado : $a^{-\frac{23}{4}}$

Ejercicio 5. Racionaliza y simplifica:

$$a) \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt[5]{27}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt[5]{3^3}} \cdot \frac{\sqrt[5]{3^2}}{\sqrt[5]{3^2}} = \frac{3\sqrt{2}\sqrt[5]{9}}{3} = \sqrt{2}\sqrt[5]{9}$$

$$= \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 + (\sqrt{2} + \sqrt{3})\sqrt{5}}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - 5} = \frac{5 + 2\sqrt{6} + \sqrt{10} + \sqrt{15}}{2\sqrt{6}}$$

$$b) \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}} \cdot \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + \sqrt{5}}{(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + \sqrt{5}} = \frac{5 + 2\sqrt{6} + \sqrt{10} + \sqrt{15}}{2\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6} + 12 + 2\sqrt{15} + 3\sqrt{10}}{12}$$

Resultado : $\frac{12 + 5\sqrt{6} + 3\sqrt{10} + 2\sqrt{15}}{12}$

Ejercicio 6. Realiza la operación racionalizando previamente:

$$\frac{2}{2 + \sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{2(2 - \sqrt{2})}{4 - 2} - \frac{\sqrt{2}(1 + \sqrt{2})}{1 - 2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= (2 - \sqrt{2}) - (-2 - \sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2} = 4 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Resultado : $\frac{8 + \sqrt{2}}{2}$

Ejercicio 7. Extrae factores, simplifica y opera:

$$\sqrt{125nk^2} - k\sqrt{180n} + \frac{1}{2}\sqrt{80nk^2}$$

$$= \sqrt{25 \cdot 5nk^2} - k\sqrt{36 \cdot 5n} + \frac{1}{2}\sqrt{16 \cdot 5nk^2}$$

$$= 5k\sqrt{5n} - 6k\sqrt{5n} + 2k\sqrt{5n}$$

Resultado : $k\sqrt{5n}$

3. Logaritmos

Ejercicio 8. Sabiendo que $\log k = x_1$:

$$E = \log \left(\frac{\sqrt[3]{k^2} \cdot 100}{k^{-3}} \right) + \log_k 100$$

$$E = \log(k^{2/3}) + \log(10^2) - \log(k^{-3}) + \frac{\log 100}{\log k}$$

$$E = \frac{2}{3} \log k + 2 + 3 \log k + \frac{2}{\log k} = \frac{11}{3} x_1 + 2 + \frac{2}{x_1}$$

Resultado : $\frac{11x_1^2 + 6x_1 + 6}{3x_1}$

Ejercicio 9. Calcula el valor exacto:

a) $\log_2 \left(\frac{\sqrt[4]{8} \cdot 2^5}{16} \right) = \log_2 \left(\frac{2^{3/4} \cdot 2^5}{2^4} \right) = \log_2(2^{3/4+1}) = \frac{7}{4}$

b) $\ln \left(\frac{1}{e^2 \cdot \sqrt{e}} \right) + \log \sqrt{0.01} = \ln(e^{-5/2}) + \log(10^{-1}) = -\frac{5}{2} - 1 = -\frac{7}{2}$

Ejercicio 10. Desarrolla y simplifica en función de $\log x$, $\log y$, $\log z$:

$$A = \log \left(\frac{x^2 \cdot \sqrt{y \cdot z^3}}{10 \cdot y^{-1}} \right)$$

$$A = \log(x^2) + \log((y \cdot z^3)^{1/2}) - \log(10) - \log(y^{-1})$$

$$A = 2 \log x + \frac{1}{2} \log y + \frac{3}{2} \log z - 1 + \log y$$

Resultado : $2 \log x + \frac{3}{2} \log y + \frac{3}{2} \log z - 1$

Ejercicio 11. Demuestra, utilizando el cambio de base, la siguiente identidad:

$$\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1$$

$$\frac{\ln b}{\ln a} \cdot \frac{\ln c}{\ln b} \cdot \frac{\ln a}{\ln c} = \frac{\ln a \cdot \ln b \cdot \ln c}{\ln a \cdot \ln b \cdot \ln c}$$

Resultado : 1