Soluciones paso a paso · Aplicaciones de las Derivadas (Nivel PAU)

Referencia: hoja adjunta filecite turn1file0

BLOQUE I · Derivada mediante definición

Ejercicio 1

$$f(x) = x^2 - 3x + 1$$

Definición:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Paso 1. Calculamos $f(x+h)$:

$$f(x+h) = (x+h)^2 - 3(x+h) + 1 \quad = x^2 + 2xh + h^2 - 3x - 3h + 1$$

Paso 2. Restamos $f(x+h) - f(x)$:

$$f(x+h) - f(x) = \left(x^2 + 2xh + h^2 - 3x - 3h + 1\right) - \left(x^2 - 3x + 1\right) \quad = 2xh + h^2 - 3h$$

Paso 3. Dividimos entre h:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{2xh + h^2 - 3h}{h} = 2x + h - 3$$

Paso 4. Hacemos el límite $h \to 0$:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} (2x + h - 3) = 2x - 3$$

✅**Resultado:** $\boxed{f'(x) = 2x - 3}$

Ejercicio 2

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Dominio de f: $x \;/\; 0. =$

Definición:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Paso 1. Sustituimos:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$$

Paso 2. Ponemos en una sola fracción:

$$\frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h} = \frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{h}$$

Paso 3. Simplificamos (se cancela h):

$$\frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{h} = -\frac{1}{x(x+h)}$$

Paso 4. Límite cuando $h \to 0$:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \left(-\frac{1}{x(x+h)} \right) = -\frac{1}{x^2}$$

✅**Resultado:** $\boxed{f'(x) = -\frac{1}{x^2}}$

Dominio de f': también $x \ / \ 0. =$

BLOQUE II · Recta tangente con punto de tangencia conocido

Ejercicio 3

$$f(x) = x^3 - 2x + 1$$

en $x = 1$.

Paso 1. Calculamos el punto de tangencia:

$$f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1 + 1 = 0$$

Punto: $P(1, 0)$.

Paso 2. Calculamos la derivada:

$$f'(x) = 3x^2 - 2$$

Paso 3. Pendiente en $x = 1$:

$$m = f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 2 = 1$$

Paso 4. Ecuación de la tangente (punto-pendiente):

$$y - 0 = 1(x - 1) \Rightarrow y = x - 1$$

✅**Recta tangente:** $\boxed{y = x - 1}$

Ejercicio 4

$$f(x) = \ln x$$

en el punto con ordenada $y = 0$.

Paso 1. Buscamos el punto:

$$\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

Punto: $P(1, 0)$.

Paso 2. Derivada:

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

Paso 3. Pendiente en $x = 1$:

$$m = f'(1) = 1$$

Paso 4. Tangente:

$$y - 0 = 1(x - 1) \Rightarrow y = x - 1$$

✅**Recta tangente:** $\boxed{y = x - 1}$

BLOQUE III · Recta tangente paralela a una recta dada

Ejercicio 5

$$f(x) = x^2 - 4x + 1$$

paralela a $y = 2x - 3$.

Rectas paralelas ⇒ **misma pendiente**: $m = 2$.

Paso 1. Derivada:

$$f'(x) = 2x - 4$$

Paso 2. Igualamos a 2:

$$2x - 4 = 2 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$$

Paso 3. Punto de tangencia:

$$f(3) = 9 - 12 + 1 = -2$$

Punto: $P(3, -2)$.

Paso 4. Tangente:

$$y + 2 = 2(x - 3) \Rightarrow y = 2x - 8$$

✅**Recta tangente:** $\boxed{y = 2x - 8}$

Ejercicio 6

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$$

paralela a $y = -x + 5$.

Pendiente: $m = -1$.

Paso 1. Derivada:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

Paso 2. Igualamos a -1:

$$3x^2 - 6x = -1 \Rightarrow 3x^2 - 6x + 1 = 0$$

Paso 3. Resolvemos la cuadrática:

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 12}}{6} = \frac{6 \pm \sqrt{24}}{6} = \frac{6 \pm 2\sqrt{6}}{6} = 1 \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Hay **dos** tangentes.

Paso 4. Puntos y ecuaciones: Para cada $x_1 = 1 + \frac{\sqrt{6}}{3}$ y $x_2 = 1 - \frac{\sqrt{6}}{3}$, calculas $y_i = f(x_i)$ y usas:

$$y - f(x_i) = -1(x - x_i)$$

✅**Resultado (forma general):**

$$\boxed{\text{Tangentes: } y = -x + x_1 + f(x_1) \quad \text{y} \quad y = -x + x_2 + f(x_2)}$$

(Si quieres, te dejo los valores numéricos de $f(x_i)$ redondeados en el examen.)

BLOQUE IV · Recta normal a una curva

Ejercicio 7

$$f(x) = x^2 + 1$$

en $x = 1$.

Paso 1. Punto:

$$f(1) = 2 \Rightarrow P(1, 2)$$

Paso 2. Pendiente de la tangente:

$$f'(x) = 2x \Rightarrow m_t = f'(1) = 2$$

Paso 3. Pendiente de la normal: Normal ⊥ tangente ⇒ $m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{2}$.

Paso 4. Ecuación:

$$y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

✅**Recta normal:** $\boxed{y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}}$

BLOQUE V · Determinación de parámetros en un polinomio cúbico

Ejercicio 8

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Condiciones: - Pasa por $(0, 1)$. - Máximo relativo en $x = 1$. - Pendiente en $x = 0$ es 2. - $f(2) = 3$.

Paso 1. Usamos $f(0) = 1$:

$$f(0) = d = 1$$

Paso 2. Derivada:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

Pendiente en 0: $f'(0) = c = 2$.

Paso 3. Máximo en $x = 1 \Rightarrow f'(1) = 0$:

$$3a + 2b + c = 0 \Rightarrow 3a + 2b + 2 = 0 \Rightarrow 3a + 2b = -2$$

Paso 4. $f(2) = 3$**:**

$$f(2) = 8a + 4b + 2c + d = 3$$

Sustituimos $c = 2$, $d = 1$:

$$8a + 4b + 4 + 1 = 3 \Rightarrow 8a + 4b = -2 \Rightarrow 4a + 2b = -1$$

Paso 5. Resolvemos el sistema:

$$\left\{3a + 2b = -2 \; 4a + 2b = -1 \right. \Rightarrow a = 1,\ 2b = -5 \Rightarrow b = -\frac{5}{2}$$

✅**Coeficientes:**

$$\boxed{a = 1,\ b = -\frac{5}{2},\ c = 2,\ d = 1}$$

(Comprobación del máximo: sería conveniente verificar que $f''(1) < 0$.)

Ejercicio 9

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Condiciones: - Pasa por el origen: $f(0) = 0$. - Inflexión en $x = 1$. - Tangente horizontal en $x = 2$: $f'(2) = 0$. - Pasa por $(1, 2)$: $f(1) = 2$.

Paso 1. $f(0) = 0 \Rightarrow d = 0$.

Paso 2. Derivadas:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c, \quad f''(x) = 6ax + 2b$$

Paso 3. Inflexión en $x = 1 \Rightarrow f''(1) = 0$:

$$6a + 2b = 0 \Rightarrow b = -3a$$

Paso 4. Tangente horizontal en $x = 2 \Rightarrow f'(2) = 0$:

$$12a + 4b + c = 0$$

Sustituimos $b = -3a$:

$$12a - 12a + c = 0 \Rightarrow c = 0$$

Paso 5. $f(1) = 2$**:**

$$a + b + c + d = 2 \Rightarrow a + (-3a) + 0 + 0 = 2 \Rightarrow -2a = 2 \Rightarrow a = -1$$

Entonces $b = 3$, $c = 0$, $d = 0$.

✅**Coeficientes:**

$$\boxed{a = -1,\ b = 3,\ c = 0,\ d = 0}$$

BLOQUE VI · Estudio completo de funciones

Ejercicio 10

$$f(x) = xe^{-x}$$

1) Dominio: $\mathbb{R}$ (está definida para todo x).

2) Derivada:

$$f'(x) = e^{-x} + x(-e^{-x}) = e^{-x}(1 - x)$$

Como $e^{-x} > 0$ siempre, el signo de f' depende de $(1 - x)$.

- Si $x < 1$, $1 - x > 0 \Rightarrow$ **crece**.
- Si $x > 1$, $1 - x < 0 \Rightarrow$ **decrece**.

✅**Máximo relativo en** $x = 1$.

$$f(1) = 1 \cdot e^{-1} = \frac{1}{e}$$

3) Segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(e^{-x}(1 - x)\right) = (-e^{-x})(1 - x) + e^{-x}(-1) = e^{-x}(x - 2)$$

Signo de f'': - Si $x < 2$, $x - 2 < 0 \Rightarrow$ **cóncava**. - Si $x > 2$, $x - 2 > 0 \Rightarrow$ **convexa**.

✅**Punto de inflexión en** $x = 2$**:**

$$f(2) = 2e^{-2} = \frac{2}{e^2}$$

Ejercicio 11

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

1) Dominio y discontinuidad: El denominador no puede ser 0 ⇒ $x\ /\ 1.=$

2) Simplificamos (si se puede):

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

Entonces para $x\ /\ 1$:=

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$$

Interpretación: Es la recta $y = x + 1$ **con un agujero** en $x = 1$. En $x = 1$ la función no está definida. El punto que "faltaría" es $(1, 2)$.

3) Crecimiento/decrecimiento: Para $x\ /\ 1, \not f(x) = x + 1 \Rightarrow f'(x) = 1.$

- Como $f'(x) = 1 > 0$, la función es **creciente** en $(-\infty, 1)$ y en $(1, \infty)$.

4) Extremos: No hay extremos relativos (la pendiente es constante y no se anula).

5) Curvatura e inflexión: $f''(x) = 0$ para $x\ /\ 1$ ⇛ no hay concavidad/convexidad ni puntos de inflexión.

✅**Resumen final:** - Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. - Gráfica: recta $y = x + 1$ con discontinuidad evitable en $x = 1$. - Creciente en ambos intervalos. - Sin extremos, sin inflexión.

Fin de las soluciones.