Límites y Continuidad - Soluciones paso a paso

Referencia: Hoja “Matemáticas II – Límites y Continuidad”.

Ejercicio 1. L’Hôpital (I)

a) **Límite:**

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 1 - 2x}{x^2}$$

b) **Tipo de indeterminación:** Al sustituir $x = 0$: - Numerador: $e^0 - 1 - 0 = 1 - 1 = 0$ - Denominador: $0^2 = 0$

Es una indeterminación $0/0$, así que podemos usar **L’Hôpital**.

c) **Aplicamos L’Hôpital 1ª vez** (derivamos numerador y denominador): - Derivada del numerador: $(e^{2x})' = 2e^{2x}$, $(-1)' = 0$, $(-2x)' = -2$.
Por tanto: $(e^{2x} - 1 - 2x)' = 2e^{2x} - 2$ - Derivada del denominador: $(x^2)' = 2x$

Queda:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x} - 2}{2x}$$

d) **Comprobamos otra vez** sustituyendo $x = 0$: - Numerador: $2 \cdot 1 - 2 = 0$ - Denominador: 0

Sigue siendo $0/0$ → L’Hôpital otra vez.

e) **Aplicamos L’Hôpital 2ª vez**: - Numerador: $(2e^{2x} - 2)' = 4e^{2x}$ - Denominador: $(2x)' = 2$

Queda:

$$\lim_{x\to 0} \frac{4e^{2x}}{2} = \lim_{x\to 0} 2e^{2x}$$

f) **Sustituimos** $x = 0$:

$$2e^0 = 2 \cdot 1 = 2$$

✅**Resultado:** $\boxed{2}$

Ejercicio 2. L’Hôpital (II)

a) **Límite:**

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{1/3}}$$

b) **Tipo de indeterminación:** Cuando $x \to +\infty$: - $\ln x \to +\infty$ - $x^{1/3} \to +\infty$

Es una indeterminación ∞/∞ → podemos usar L'Hôpital.

c) **Aplicamos L'Hôpital**: - $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ - $(x^{1/3})' = \frac{1}{3}x^{-2/3}$

Entonces:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{1/3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{(1/3)x^{-2/3}}$$

d) **Simplificamos**:

$$\frac{1/x}{(1/3)x^{-2/3}} = \frac{1}{x} \cdot \frac{3}{x^{-2/3}} = 3 \cdot \frac{1}{x} \cdot x^{2/3} = 3x^{2/3-1} = 3x^{-1/3}$$

e) **Ahora el límite es directo**:

$$\lim_{x\to+\infty} 3x^{-1/3} = 3 \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{1/3}} = 0$$

✅**Resultado:** $\boxed{0}$

Ejercicio 3. L'Hôpital (III)

a) **Límite:**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$$

b) **Indeterminación:** Al sustituir $x = 0$: - Numerador: $\tan 0 - 0 = 0$ - Denominador: 0

Es $0/0$ → L'Hôpital.

c) **1ª vez L'Hôpital**: - $(\tan x - x)' = \sec^2 x - 1$ - $(x^3)' = 3x^2$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2}$$

d) Sustituyendo $x = 0$: - $\sec^2 0 - 1 = 1 - 1 = 0$ - Denominador 0

Sigue $0/0$ → otra vez.

e) **2ª vez L'Hôpital**: - $(\sec^2 x - 1)' = (\sec^2 x)' = 2\sec^2 x \tan x$ - $(3x^2)' = 6x$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sec^2 x \tan x}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sec^2 x \tan x}{3x}$$

f) Sustituimos $x = 0$: - Numerador: $\sec^2 0 \tan 0 = 1 \cdot 0 = 0$ - Denominador: 0

Otra vez $0/0 \to$ tercera vez.

g) **3ª vez L'Hôpital**: Derivamos numerador con regla del producto: $g(x) = \sec^2 x$, $h(x) = \tan x$. - $g'(x) = 2\sec^2 x \tan x$ - $h'(x) = \sec^2 x$

$$(\sec^2 x \tan x)' = g'h + gh' = (2\sec^2 x \tan x)\tan x + \sec^2 x \sec^2 x$$
$$= 2\sec^2 x \tan^2 x + \sec^4 x$$

Derivada del denominador $(3x)' = 3$.

Entonces:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sec^2 x \tan^2 x + \sec^4 x}{3}$$

h) **Sustituimos** $x = 0$: - $\tan 0 = 0 \to$ el primer término se anula. - $\sec 0 = 1 \to \sec^4 0 = 1$

$$\frac{0+1}{3} = \frac{1}{3}$$

✅**Resultado:** $\boxed{\frac{1}{3}}$

Ejercicio 4. Parámetro para límite finito

a) **Límite:**

$$\lim_{x\to 0} \frac{ax + \sin x}{x}$$

b) **Separamos en dos fracciones**:

$$\frac{ax + \sin x}{x} = \frac{ax}{x} + \frac{\sin x}{x} = a + \frac{\sin x}{x}$$

c) **Usamos el límite conocido**:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Entonces:

$$\lim_{x\to 0} \left(a + \frac{\sin x}{x}\right) = a + 1$$

✅**Conclusión:** el límite **existe y es finito para cualquier** a.
El valor del límite es $\boxed{a+1}$.

Ejercicio 5. Parámetro y asíntota oblicua

Dada:

$$f(x) = \frac{2x^2 + ax + 1}{x}$$

Queremos que la asíntota oblicua sea:

$$y = 2x + 3$$

a) **Dividimos** cada término entre x:

$$f(x) = \frac{2x^2}{x} + \frac{ax}{x} + \frac{1}{x} = 2x + a + \frac{1}{x}$$

b) Cuando $x \to \pm\infty$, el término $\frac{1}{x} \to 0$.
Entonces la recta que se “queda” es:

$$y = 2x + a$$

c) Para que sea exactamente $y = 2x + 3$, necesitamos:

$$a = 3$$

✅**Resultado:** $\boxed{a = 3}$

Ejercicio 6. Continuidad a trozos (I)

$$f(x) = \left\{ ax + 2, \quad x < 1\ x^2 + 1,\ x \geq 1 \right.$$

Pedir continuidad en $x = 1$.

a) Para continuidad en $x = 1$ debe cumplirse:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1) = \lim_{x \to 1^+} f(x)$$

b) **Límite por la izquierda** (usamos la parte $ax + 2$):

$$\lim_{x \to 1^-} (ax + 2) = a \cdot 1 + 2 = a + 2$$

c) **Valor en 1** (se usa la parte $x \geq 1$):

$$f(1) = 1^2 + 1 = 2$$

d) Igualamos:

$$a + 2 = 2 \Rightarrow a = 0$$

✅**Resultado:** $\boxed{a = 0}$

Ejercicio 7. Continuidad en todo $\mathbb{R}$

$$f(x) = \{ax + b, \quad x < 0\ x^2 + 1, \ 0 \leq x < 2\ 3x - 1, \quad x \geq 2$$

Para que sea continua en todo $\mathbb{R}$, debe ser continua en los puntos de cambio: **0 y 2**.

1) Continuidad en $x = 0$

- Límite por izquierda: $ax + b \to b$

$$\lim_{x \to 0^-} (ax + b) = b$$

- Valor en 0 (segunda parte):

$$f(0) = 0^2 + 1 = 1$$

Entonces:

$$b = 1$$

2) Continuidad en $x = 2$

- Límite por izquierda (segunda parte):

$$\lim_{x \to 2^-} (x^2 + 1) = 2^2 + 1 = 5$$

- Valor en 2 (tercera parte):

$$f(2) = 3 \cdot 2 - 1 = 6 - 1 = 5$$

Aquí ya coincide sin tocar a.

✅**Conclusión:** $\boxed{b = 1}$ y $\boxed{a \text{ puede ser cualquier real}}$.

Ejercicio 8. Derivabilidad en $x = 0$

$$f(x) = \{ax + b, \quad x \leq 0\ x^2 + 1, \ x > 0$$

Para que sea **derivable** en 0, primero debe ser **continua** en 0 y después tener derivadas laterales iguales.

1) Continuidad en $x = 0$

- Valor por la izquierda (y valor en 0):

$$f(0) = a \cdot 0 + b = b$$

- Límite por la derecha:

$$\lim_{x \to 0^+} (x^2 + 1) = 1$$

Para continuidad:

$$b = 1$$

2) Igualar derivadas laterales

- Derivada por la izquierda: $(ax + b)' = a$
- Derivada por la derecha: $(x^2 + 1)' = 2x$ → en 0 vale 0.

Para derivabilidad:

$$a = 0$$

✅**Resultado:** $\boxed{a = 0,\ b = 1}$

Ejercicio 9. Teorema de Bolzano en $[0, 2]$

$$f(x) = \{x^2 - a, \quad 0 \le x < 1\ 2x - 3,\ 1 \le x \le 2$$

Queremos que se cumplan las **hipótesis de Bolzano** en $[0, 2]$: 1) f debe ser **continua** en $[0, 2]$. 2) $f(0) \cdot f(2) < 0$ (valores de distinto signo).

1) Continuidad en el punto de empalme $x = 1$

- Límite por izquierda:

$$\lim_{x \to 1^-} (x^2 - a) = 1 - a$$

- Valor en 1 (segunda parte):

$$f(1) = 2 \cdot 1 - 3 = -1$$

Para continuidad:

$$1 - a = -1 \Rightarrow a = 2$$

2) Comprobar cambio de signo entre extremos

Con $a = 2$: - $f(0) = 0^2 - 2 = -2$ (negativo) - $f(2) = 2 \cdot 2 - 3 = 1$ (positivo)

Producto:

$$(-2) \cdot 1 = -2 < 0$$

Se cumple.

✅**Resultado:** $\boxed{a = 2}$

Resumen final de resultados

- **E1:** 2
- **E2:** 0
- **E3:** $1/3$
- **E4:** el límite existe para todo a y vale $a + 1$
- **E5:** $a = 3$
- **E6:** $a = 0$
- **E7:** $b = 1$, a cualquiera
- **E8:** $a = 0$, $b = 1$
- **E9:** $a = 2$