



HOJA DE EJERCICIOS – APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

Ejercicios propuestos por Comunidades para PAU 2026

Ejercicio 1. Modelo propuesto 2026 – ANDALUCÍA

Propuesta 1. La contaminación por dióxido de nitrógeno, NO_2 , en cierta estación de medición de una ciudad, durante el pasado mes de abril, se puede modelar por la función:

$$c(t) = 80 - 6t + \frac{23t^2}{20} - \frac{t^3}{30},$$

medido en mg/m^3 , donde $t \in [0, 30]$ representa el tiempo, expresado en días, transcurrido desde las 0 horas del día 1 de abril. a) ¿Qué nivel de NO_2 había a las 12 horas del día 10 de abril? b) ¿En qué momento se alcanzó el máximo nivel de NO_2 ?, ¿cuál fue ese nivel máximo?

Propuesta 2. Se administra una medicina a un enfermo y t horas después la concentración en sangre del principio activo viene dada por $c(t) = te^{-t/2}$ miligramos por mililitro. a) Determina el valor máximo de $c(t)$ e indica en qué momento se alcanza dicho valor máximo. b) Sabiendo que la máxima concentración sin peligro es de 1 mg/ml , ¿en algún momento hay riesgo para el paciente.

Propuesta 3. En una habitación se ha dejado una bebida caliente, su temperatura $T(t)$ en grados Celsius se puede modelar por la función

$$T(t) = \frac{90 + 20t}{t + 1}$$

donde $t \geq 0$ representa el tiempo en segundos.

a) En relación a la función $T(t)$, indica su dominio, intervalos de crecimiento e intervalos de concavidad, posibles extremos y posibles asíntotas. Esboza la gráfica de dicha función. b) Indica, justificando tu respuesta, cuál era la temperatura inicial que tenía la bebida, describe cómo ha evolucionado su temperatura y cuál sería la hipotética temperatura final que alcanzaría. ¿A qué temperatura está la habitación?

Propuesta 4. El número de moléculas en una placa de ensayo viene dado por la función $f(x) = e^{x^2} - 2x$ expresado en miles de moléculas, donde $x \in [0, 5]$ indica el tiempo en horas. a) Realiza un estudio del crecimiento de dicha función. ¿Cuáles son las cantidades máxima y mínima? ¿En qué momento se alcanzan? b) ¿Cuál es la velocidad de crecimiento a las 3 horas? ¿Cuál es la velocidad media de crecimiento en el intervalo $[0, 5]$?

Propuesta 5. La suma de la longitud de una circunferencia y el perímetro de un cuadrado son 10 metros. a) ¿Cuáles deben ser las longitudes del radio de la circunferencia y de un lado del cuadrado para que la suma de las áreas del círculo y del cuadrado sea mínima? b) ¿Es posible determinar las longitudes del radio de la circunferencia y de un lado del cuadrado para que la suma de las áreas sea máxima?

Propuesta 6. El beneficio (en miles de euros) que obtiene una empresa al vender x miles de unidades de un producto viene dado por la función: $B(x) = -2x^3 + 15x^2 + 36$, donde x está en el intervalo $[0, 8]$. Se pide: a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento del beneficio y localiza los valores de x en los que se alcanzan máximos y mínimos relativos. Calcula también el valor máximo y mínimo absolutos del beneficio en dicho intervalo. b) Justifica razonadamente qué decisión tomaría la empresa en función de los resultados y por qué en los problemas de optimización en intervalos cerrados es imprescindible comparar los extremos relativos con los valores en los extremos del intervalo.

Propuesta 7. Calcula los valores a, b, c, d de la función polinómica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, sabiendo que la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto de inflexión $(1, 0)$ es $y = 3x - 3$ y que el punto de abscisa $x = 0$ es un extremo relativo. b) Halla dos funciones polinómicas: la primera que tenga un único extremo relativo y la segunda que no contenga ninguno.

Propuesta 8. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^2 + 4x + 3$. Encuentra los valores del parámetro a para los que la recta que pasa por el origen $y = ax$ es tangente a la gráfica de f . ¿Cuál es la abscisa de los puntos de tangencia?

Propuesta 9. Considera la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} \text{ si } x \neq 1, -1$$

- Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f .
- Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .
- ¿Es creciente f en el conjunto $(-1, 1) \cup (1, +\infty)$? Justifica tu respuesta.

Propuesta 10. Se han realizado varios estudios para determinar el modo en que se transmiten los bulos en cierta red social. Un primer estudio ha establecido que el número (aproximado) de personas $f(t)$ (expresado en miles) que conocen y difunden un bulo viene dado por la función:

$$f(t) = \frac{18}{1 + 2^{-t+3}}$$

donde t representa el tiempo (en días). a) Según este modelo, ¿cuántas personas empiezan a difundir el bulo? b) A medida que transcurre el tiempo, ¿está limitado el número de personas que conocen el bulo? En caso afirmativo, ¿cuál es su límite y por qué?

En un segundo estudio, han simplificado el modelo anterior y han establecido que el número (aproximado) de personas $g(t)$ (expresado en miles) que conocen y difunden un bulo viene dado por la función:

$$g(t) = \frac{18}{\pi} \arctan(t - 3) + 9$$

donde t representa el tiempo (en días). c) Según este segundo modelo, ¿en qué momento empieza a disminuir la velocidad a la que se propaga el bulo? ¿Cuántas personas conocen en dicho momento el bulo?

Ejercicio 2. Modelo propuesto 2026 – ASTURIAS

Se dispone de una placa circular de 4 metros de radio, de la que se pretende obtener una pieza rectangular de área máxima. Sabiendo que el centro del rectángulo está en el centro de la placa, calcule la longitud de los lados del rectángulo y el área de este. (Ayuda: la ecuación de la circunferencia de centro en el punto (a, b) radio r es:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.)$$

Ejercicio 3. Modelo propuesto 2026 – CASTILLA LA MANCHA

Propuesta 1. La concentración de virus activos en una muestra de sangre (en un tiempo t desde que se tomó la muestra) se puede modelizar como una función $f(t) = 5(t + 1)e^{-t}$, con $t \geq 0$. a) La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(t)$ mide cómo cambia la concentración de virus activos. Calcula el tiempo en el que este cambio toma el valor más pequeño posible, es decir, el tiempo t en el que el valor de la derivada de $f(t)$ es mínimo. b) ¿Cuál sería el valor de la concentración de virus a largo plazo? Es decir, el valor cuando el tiempo tiende a infinito.

Propuesta 2. a) Responde justificadamente los siguientes apartados a) Demuestra que la ecuación $\sin x - 2x + 1 = 0$ tiene al menos una solución real en el intervalo $[0, \pi]$. b) Calcula razonadamente el número exacto de soluciones de la ecuación anterior cuando $x \in [-200, 200]$.

Propuesta 3. Responde justificadamente los siguientes apartados a) Determina razonadamente el punto (x, y) de la parábola $y = x^2 + 1$ en el que la suma de sus coordenadas alcanza su mínimo valor. b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta normal a la gráfica de la parábola dada en el punto de abscisa $x = -1/2$

Ejercicio 4 Modelo propuesto 2026 – MADRID

Propuesta 1. Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(-8 + \cos x) & \text{si } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ a \sin(x) + 4 & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \\ 2 \sin(2x) + b & \text{si } \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

a) Halle los valores de a y b para que se verifiquen las hipótesis del Teorema de Bolzano en $[0, 2\pi]$. b) Justifique razonadamente que la función $f(x)$ tiene una única raíz en el intervalo $(0, 2\pi)$ y calcule dicha raíz.

Propuesta 2. Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Se pide:

a) Determinar si $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

b) Determinar si $f(x)$ es derivable en el punto $x = 0$ y, si existe, calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ -

Propuesta 3. Dada:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{|x| + 1}.$$

Analizar la paridad y los extremos relativos de $f(x)$.

Ejercicio 5 Modelo propuesto 2026 – GALICIA

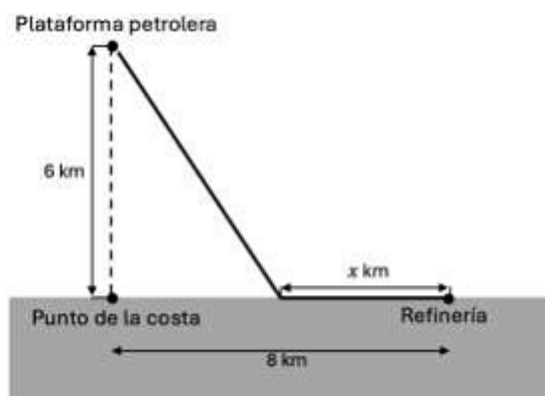
Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = \arctan(x + \pi)$, donde $\arctan$ denota la función arco tangente. A) . Determine los intervalos de concavidad y de convexidad de f . Estudie y halle, si existen, los puntos de inflexión de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan). B). Calcule:

$$\lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{f(x)}{\sin x}.$$

¿Cuál sería el valor del límite si cambiamos en el denominador $\sin x$ por $g(x)$, siendo $g(x) = \sin x$ si $x \neq -\pi$ y $g(-\pi) = 2$? C) La suma de los perímetros de un cuadrado y un triángulo equilátero es igual a 100 metros. ¿Cuáles deben ser las medidas de los lados del cuadrado y del triángulo para que la suma de sus áreas sea mínima?.

Ejercicio 6. Modelo propuesto 2026 – COMUNIDAD VALENCIANA

Una costa marítima se extiende en línea recta hacia la derecha desde un punto P de la costa. A 8 km de P hay una refinería situada en la costa. Además, hay una plataforma petrolífera en el mar que está situada a 6 km de distancia de P en la recta perpendicular a la costa desde el punto P. Se construirá un oleoducto desde la plataforma hasta la refinería. El coste de construir el oleoducto bajo el agua es de 1 millón de euros por kilómetro y el de construirlo sobre tierra, de 0,6 millones de euros por kilómetro.



- Encontrar la función del coste de construcción del oleoducto dependiendo de la distancia, x , entre el primer punto donde el oleoducto toca la costa y la refinería.
- Encontrar el valor de x para que el coste de construcción del oleoducto sea mínimo.
- Calcular dicho coste.



HOJA DE EJERCICIOS – APLICACIONES DE LAS DERIVADAS
Ejercicios de carácter competencial propuestos por Academia de Ciencias Lógica para PAU 2026

Ejercicio 1. Modelo competencial 2026 – ACADEMIA DE CIENCIAS LÓGICA

El número de personas afectadas por una variante de gripe en una ciudad viene dado por la función

$$P(t) = \frac{100t}{t^2+9}$$

(en miles), donde t es el tiempo en semanas desde el inicio del brote. (a) ¿En qué semana se alcanza el número máximo de afectados? ¿A cuántas personas corresponde ese máximo? (b) ¿En qué momento la enfermedad se propaga con mayor rapidez? (Pista: Busca el máximo de la velocidad de crecimiento).

Ejercicio 2. Modelo competencial 2026 – ACADEMIA DE CIENCIAS LÓGICA

Una empresa de mensajería ha determinado que el coste total de operar una flota de furgonetas eléctricas depende de la velocidad media v (en km/h) según la función

$$C(v) = \frac{500}{v} + 0.2v + 15$$

Determina la velocidad óptima a la que deben circular las furgonetas para minimizar el coste operativo y calcula dicho coste mínimo.

Ejercicio 3. Modelo competencial 2026 – ACADEMIA DE CIENCIAS LÓGICA

La difusión de una noticia falsa (bulo) sigue el modelo $B(t) = -t^3 + 6t^2 + 15t$, donde $B(t)$ es el número de compartidos y t el tiempo en horas ($0 \leq t \leq 8$). (a) Determina en qué intervalo de tiempo el número de compartidos está creciendo. (b) ¿En qué momento exacto el bulo empieza a perder fuerza, es decir, ¿cuándo empieza a disminuir la velocidad de propagación?

Ejercicio 4. Modelo competencial 2026 – ACADEMIA DE CIENCIAS LÓGICA

El perfil de la cubierta de un pabellón deportivo sigue la curva $f(x) = 10 - 0.1x^2$ para $x \in [-10, 10]$. Se desea instalar un panel solar plano que sea tangente a la cubierta en el punto de abscisa $x = 5$. (a) Halla la ecuación de la recta que define la posición del panel solar. (b) Determina el ángulo de inclinación del panel respecto a la horizontal (eje OX).

Ejercicio 5. Modelo competencial 2026 – ACADEMIA DE CIENCIAS LÓGICA

Los beneficios mensuales de una startup de software dependen de la inversión en publicidad x (en miles de euros) según la función $B(x) = \ln(x^2 + 1) - 0.1x$. (a) Calcula la inversión publicitaria que maximiza el beneficio mensual. (b) Justifica, mediante la segunda derivada, que el valor hallado es efectivamente un máximo relativo.

Ejercicio 6. Modelo competencial 2026 – ACADEMIA DE CIENCIAS LÓGICA

Se quiere construir un depósito de agua con forma de cilindro circular recto de 10 m^3 de capacidad. El material de las bases cuesta 20 euros/m^2 y el de la pared lateral 10 euros/m^2 . (a) Expresa el coste total del depósito en función del radio r de la base. (b) Calcula las dimensiones (radio y altura) que minimizan el coste de construcción.

Ejercicio 7. Modelo competencial 2026 – ACADEMIA DE CIENCIAS LÓGICA

La capacidad de memorización de una lista de términos viene dada por

$$C(t) = \frac{40t}{t+2}$$

donde t es el tiempo de estudio en minutos. (a) Estudia el crecimiento de la función y justifica si existe un límite teórico a la cantidad de términos que se pueden memorizar según este modelo. (b) ¿A qué ritmo está aprendiendo el sujeto cuando lleva exactamente 3 minutos de estudio?

Ejercicio 8. Modelo competencial 2026 – ACADEMIA DE CIENCIAS LÓGICA

La eficiencia de una turbina eólica en función de la velocidad del viento w viene dada por $E(w) = w^2 e^{-0.5w}$. (a) Determina los intervalos de concavidad y convexidad de la función de eficiencia. (b) Interpreta qué significa el punto de inflexión en el contexto del rendimiento de la turbina.

Ejercicio 9. Modelo competencial 2026 – ACADEMIA DE CIENCIAS LÓGICA

El nivel de agua en un embalse respecto a la cota de seguridad (en metros) durante las primeras 10 horas de una tormenta sigue la función $H(t) = t^3 - 8t^2 + 15t - 2$. (a) Justifica, utilizando el teorema de Bolzano, que el nivel de agua fue igual a la cota de seguridad (altura 0) en algún momento del intervalo $[0, 1]$. (b) ¿Podemos asegurar que existe otro momento de altura cero en el intervalo $[1, 3]$? Razona tu respuesta.

Ejercicio 10. Modelo competencial 2026 – ACADEMIA DE CIENCIAS LÓGICA

Un vehículo entra en un tramo de autopista controlado por un radar de tramo a las 10:00 h circulando a 110 km/h. Recorre los 40 km del tramo y sale a las 10:18 h circulando también a 110 km/h. El límite de velocidad es de 120 km/h. (a) Calcula la velocidad media del vehículo en el tramo. (b) Justifica, mediante el Teorema del Valor Medio, si el conductor debe ser sancionado por exceso de velocidad en algún instante, independientemente de la velocidad marcada en la entrada y salida.

Ejercicio 11. Modelo competencial 2026 – ACADEMIA DE CIENCIAS LÓGICA

Un dron de inspección térmica despegue, alcanza una altura determinada y vuelve a aterrizar en el mismo punto 4 minutos después. Su altura en metros viene dada por una función $h(t)$ que es continua y derivable. (a) Justifica razonadamente que existe al menos un instante $t \in (0, 4)$ en el que la velocidad vertical del dron es nula. (b) Si la función de altura fuera $h(t) = -t^2 + 4t$, halla dicho instante y comprueba el resultado.

Ejercicio 12. Modelo competencial 2026 – ACADEMIA DE CIENCIAS LÓGICA

La tasa de variación del valor de una acción tecnológica en una jornada de 8 horas se modela mediante $v(t) = e^{t-4} - 2$. (a) Demuestra que existe un instante entre la hora 4 y la hora 6 en el que la tasa de variación es nula (el valor de la acción se estabiliza momentáneamente). (b) ¿Es la función continua en todo su dominio? Justifica por qué es necesario este requisito para aplicar el teorema.

Ejercicio 13. Modelo competencial 2026 – ACADEMIA DE CIENCIAS LÓGICA

Un camión de reparto recorre una distancia de 150 km en 2 horas. La función posición $s(t)$ es derivable. (a) Demuestra que en algún momento del trayecto el velocímetro marcó exactamente 75 km/h. (b) Si el camión tuvo que detenerse en un semáforo a mitad del trayecto y luego recuperó el tiempo, ¿afecta esto a la existencia del punto garantizado por el teorema?

Ejercicio 14. Modelo competencial 2026 – ACADEMIA DE CIENCIAS LÓGICA

Sea la función $f(x) = x^3 + 3x + 1$. (a) Utiliza el Teorema de Bolzano para demostrar que la función tiene al menos una raíz real en el intervalo $[-1, 0]$. (b) Utiliza el Teorema de Rolle (por reducción al absurdo) para demostrar que dicha raíz es única (Pista: supón que existen dos raíces y mira qué pasaría con la derivada).

Ejercicio 15. Modelo competencial 2026 – ACADEMIA DE CIENCIAS LÓGICA

El número de piezas fabricadas por una máquina tras t horas viene dado por:

$$N(t) = \sqrt{100t}$$

(a) Calcula la tasa de producción media entre las horas $t = 1$ y $t = 4$. (b) Encuentra el instante exacto en el que la tasa de producción instantánea coincide con la tasa media calculada anteriormente.

Ejercicio 16. Modelo competencial 2026 – ACADEMIA DE CIENCIAS LÓGICA

Se desea diseñar el perfil de una bajada en una montaña rusa mediante una función cúbica $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Se imponen las siguientes condiciones de diseño: El recorrido empieza en el punto más alto, situado en $(0, 20)$. En dicho punto inicial, la pendiente debe ser nula para facilitar la salida del coche. La bajada termina en el punto $(10, 0)$, donde la pista vuelve a ser horizontal para conectar con el siguiente tramo. Calcula los coeficientes a , b , c y d que definen este perfil.

Ejercicio 17. Modelo competencial 2026 – ACADEMIA DE CIENCIAS LÓGICA

La trayectoria de un tren de alta velocidad en un tramo curvo sigue la función:

$$f(x) = \sqrt{x+4}.$$

Debido a un fallo en las agujas, un vagón se desengancha justo en el punto de abscisa $x = 5$ y continúa moviéndose en línea recta siguiendo la dirección de la recta tangente en ese instante. (a) Halla la ecuación de la trayectoria rectilínea que seguirá el vagón desenganchado. (b) Si a una distancia de $x = 10$ hay un muro de seguridad, ¿en qué coordenada de altura impactará el vagón?

Ejercicio 18. Modelo competencial 2026 – ACADEMIA DE CIENCIAS LÓGICA

El coste de producción de una fábrica de componentes electrónicos cambia de régimen al superar las 100 unidades ($x = 1$ en cientos). La función de coste es:

$$C(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 5 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ bx + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Calcula a y b sabiendo que el coste es continuo y que el coste marginal (la derivada) no presenta saltos en el cambio de régimen.

Ejercicio 19. Modelo competencial 2026 – ACADEMIA DE CIENCIAS LÓGICA

Un rayo láser incide sobre una superficie curva definida por la función $f(x) = e^{2x}$. Se sabe que el rayo se refleja de forma perpendicular a la recta tangente en el punto $(0, 1)$. (a) Calcula la ecuación de la recta tangente en dicho punto. (b) Halla la ecuación de la recta normal (perpendicular a la tangente) que representa la dirección del rayo reflejado.

Ejercicio 20. Modelo competencial 2026 – ACADEMIA DE CIENCIAS LÓGICA

El flujo de agua en una canalización viene dado por $h(x) = ax^2 + bx + c$. Se necesita que la canalización pase por los puntos $(1, 2)$ y $(2, 5)$, y que en el punto $(1, 2)$ la pendiente sea exactamente 3 para conectar con una tubería previa. Calcula los coeficientes del polinomio.