

SOLUCIÓN - INTEGRALES DEFINIDAS

A. Regla de Barrow

1. Calcula $\int_{-1}^2 (3x^2 - 4x + 1)dx$

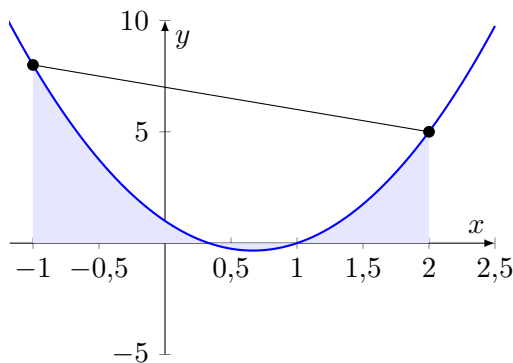
Solución:

Buscamos una primitiva de la función $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$:

$$F(x) = \frac{3x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + x = x^3 - 2x^2 + x$$

Aplicamos la Regla de Barrow en el intervalo $[-1, 2]$:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 (3x^2 - 4x + 1)dx &= F(2) - F(-1) \\ &= [(2)^3 - 2(2)^2 + 2] - [(-1)^3 - 2(-1)^2 + (-1)] \\ &= [8 - 8 + 2] - [-1 - 2 - 1] \\ &= 2 - (-4) = \mathbf{6}\end{aligned}$$



2. Calcula $\int_0^\pi (2 \sin x - \cos x)dx$

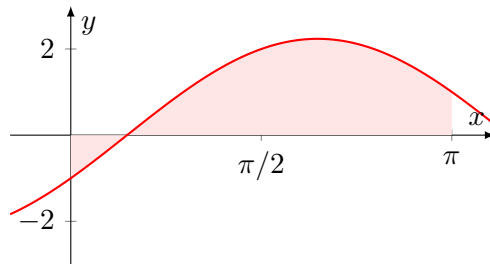
Solución:

La primitiva es:

$$F(x) = -2 \cos x - \sin x$$

Aplicamos Barrow:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} (2 \sin x - \cos x) dx &= [-2 \cos(\pi) - \sin(\pi)] - [-2 \cos(0) - \sin(0)] \\ &= [-2(-1) - 0] - [-2(1) - 0] \\ &= 2 - (-2) = 4\end{aligned}$$

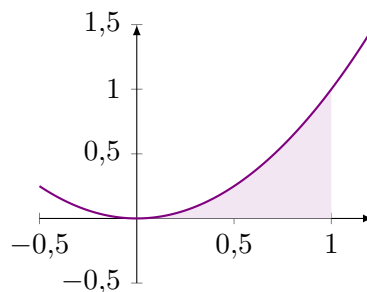


B. Cálculo de áreas

3. Área limitada por $y = x^2$, eje x , $x = 0$ y $x = 1$

Solución:

$$A = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3} \text{ u}^2$$



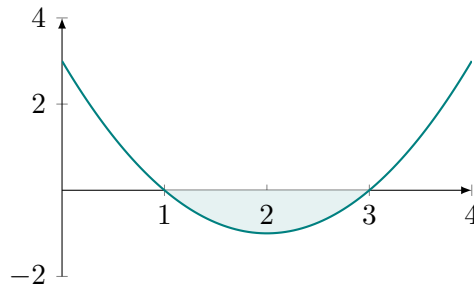
4. Área entre $y = x^2 - 4x + 3$ y el eje x

Solución: Puntos de corte con el eje X: $x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x - 3) = 0$. Raíces: $x = 1, x = 3$. En $(1, 3)$ la función es negativa, tomamos valor absoluto:

$$A = \left| \int_1^3 (x^2 - 4x + 3) dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right]_1^3 \right|$$

$$F(3) = 9 - 18 + 9 = 0. F(1) = 1/3 - 2 + 3 = 4/3.$$

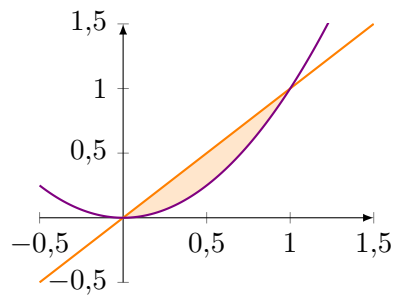
$$A = |0 - 4/3| = \frac{4}{3} \text{ u}^2$$



5. Área limitada por $y = x$ e $y = x^2$

Solución: Cortes: $x^2 = x \Rightarrow x(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1$. En $(0, 1)$, $x > x^2$:

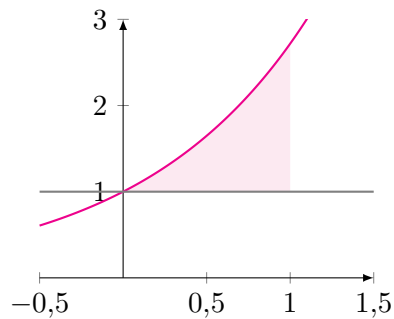
$$A = \int_0^1 (x - x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \text{ u}^2$$



6. Área entre $y = e^x$, $y = 1$, $x = 0$ y $x = 1$

Solución: Como $e^x \geq 1$ para $x \geq 0$:

$$A = \int_0^1 (e^x - 1) dx = [e^x - x]_0^1 = (e - 1) - (1 - 0) = e - 2 \text{ u}^2$$

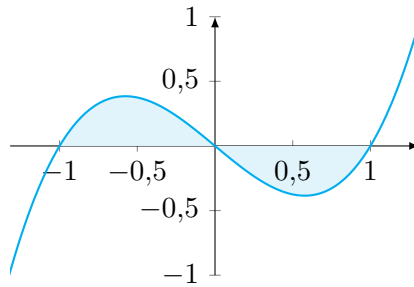


7. Área limitada por $y = x^3 - x$ y el eje x

Solución: Raíces: $x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, -1, 1$. Simetría impar. Área total = $2 \times$ Área en $[0, 1]$ (en valor absoluto).

$$\int_0^1 (x^3 - x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

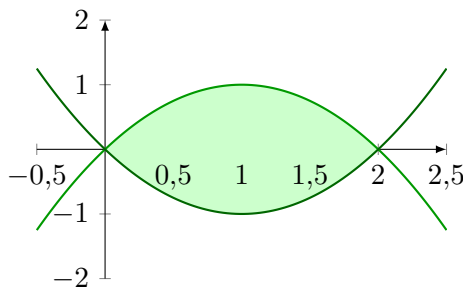
$$\text{Área Total} = \left| -\frac{1}{4} \right| + \left| -\frac{1}{4} \right| = \frac{1}{2} \text{ u}^2$$



8. Área entre $y = x^2 - 2x$ e $y = -x^2 + 2x$

Solución: Intersección: $x^2 - 2x = -x^2 + 2x \Rightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$. En $(0, 2)$, parábola invertida arriba.

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 [(-x^2 + 2x) - (x^2 - 2x)] dx = \int_0^2 (-2x^2 + 4x) dx \\ &= \left[-\frac{2x^3}{3} + 2x^2 \right]_0^2 = \left(-\frac{16}{3} + 8 \right) - 0 = \frac{8}{3} \text{ u}^2 \end{aligned}$$



C. Determinación de un límite de integración

9. Determina $a > 0$ tal que el área bajo $y = x$ hasta $x = a$ sea 8

Solución:

$$\int_0^a x dx = 8 \Rightarrow \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^a = 8 \Rightarrow \frac{a^2}{2} = 8 \Rightarrow a^2 = 16$$

Como $a > 0$, entonces $a = 4$.

10. Determina $a > 0$ tal que $\int_0^a (3x^2 + 1)dx = 10$

Solución:

$$\left[x^3 + x \right]_0^a = 10 \Rightarrow a^3 + a - 10 = 0$$

Por Ruffini probamos divisores de 10. Para $a = 2$: $8 + 2 - 10 = 0$. Solución: **a = 2**.

D. Cálculo de la constante de integración

11. $F(x) = \int_0^x (2t - 3)dt + c$, halla c si $F(0) = 5$

Solución: Evaluamos en $x = 0$:

$$F(0) = \int_0^0 (2t - 3)dt + c = 0 + c = c$$

Dado que $F(0) = 5$, entonces **c = 5**.

12. $F(x) = \int_1^x (t^2 + 1)dt + c$, halla c si $F(0) = -4/3$

Solución:

$$\begin{aligned} F(0) &= \int_1^0 (t^2 + 1)dt + c = - \int_0^1 (t^2 + 1)dt + c \\ &= - \left[\frac{t^3}{3} + t \right]_0^1 + c = - \left(\frac{1}{3} + 1 \right) + c = -\frac{4}{3} + c \end{aligned}$$

Igualamos a $-4/3$:

$$-\frac{4}{3} + c = -\frac{4}{3} \Rightarrow \mathbf{c = 0}$$