



Solucionario: Campo Gravitatorio

1. Ejercicio 1 - Aragón (Dinámica Orbital)

Resolución

a) Relación de periodos y velocidades: Datos: $R_2 = 3R_1$. Órbitas circulares. Aplicamos la Tercera Ley de Kepler ($T^2 \propto R^3$):

$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3 = 3^3 = 27 \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{27} \approx \mathbf{5,20}$$

Para las velocidades orbitales ($v = \sqrt{GM/R}$):

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{GM/R_1}{GM/R_2}} = \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} = \sqrt{3} \approx \mathbf{1,73}$$

La velocidad de p_1 es 1,73 veces mayor que la de p_2 .

b) Campo gravitatorio nulo entre planetas: Suponemos alineación Estrella - p_1 - p_2 (conjunción inferior). Distancia entre planetas: $d = R_2 - R_1 = 3R_1 - R_1 = 2R_1$. Buscamos un punto a distancia x de p_1 y $(d - x)$ de p_2 donde los campos se anulen ($g_1 = g_2$). Masa $m_2 = 10m_1$.

$$G\frac{m_1}{x^2} = G\frac{m_2}{(d-x)^2} \Rightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{10}{(2R_1 - x)^2}$$

Tomamos raíz cuadrada:

$$\frac{1}{x} = \frac{\sqrt{10}}{2R_1 - x} \Rightarrow 2R_1 - x = \sqrt{10}x \Rightarrow 2R_1 = x(1 + \sqrt{10})$$

$$x = \frac{2R_1}{1 + \sqrt{10}} = \frac{2 \cdot 3,78 \cdot 10^{12}}{4,16} \approx \mathbf{1,82 \cdot 10^{12} \text{ m}} \text{ desde } p_1$$

c) Energía para desplazar p_1 a la órbita de p_2 : Energía en órbita: $E = -\frac{GMm}{2R}$.

$$\Delta E = E_{final} - E_{inicial} = -\frac{GM_{est}m_1}{2R_2} - \left(-\frac{GM_{est}m_1}{2R_1}\right)$$

Sustituyendo $R_2 = 3R_1$:

$$\Delta E = \frac{GM_{est}m_1}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{3R_1}\right) = \frac{GM_{est}m_1}{2R_1} \cdot \frac{2}{3} = \frac{GM_{est}m_1}{3R_1}$$

$$\Delta E = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,697 \cdot 10^{30} \cdot 2,35 \cdot 10^{27}}{3 \cdot 3,78 \cdot 10^{12}} \approx \mathbf{7,87 \cdot 10^{34} \text{ J}}$$

Como $\Delta E > 0$, hay que **suministrar energía**.

2. Ejercicio 2 - Andalucía (Energía Satélite)

i) **Energía mecánica en órbita:** Datos: $m = 500$ kg, $v = 4000$ m/s. En órbita circular, se cumple que $v^2 = GM/r$. La energía mecánica es $E = -\frac{GMm}{2r}$. Sustituyendo $GM/r = v^2$:

$$E = -\frac{1}{2}mv^2 = -0,5 \cdot 500 \cdot 4000^2 = -4 \cdot 10^9 \text{ J}$$

ii) **Energía de lanzamiento desde superficie:**

$$\Delta E = E_{\text{órbita}} - E_{\text{superficie}}$$

$$E_{\text{superficie}} = -\frac{GM_T m}{R_T} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \cdot 500}{6,37 \cdot 10^6} \approx -3,13 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

$$\Delta E = -4 \cdot 10^9 - (-3,13 \cdot 10^{10}) = -0,4 \cdot 10^{10} + 3,13 \cdot 10^{10} = 2,73 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

3. Ejercicio 3 - Asturias (Planeta Desconocido)

a) **Aceleración de la gravedad (g):** Caída libre: $h = 1,90$ m, $v = 8$ m/s, $v_0 = 0$.

$$v^2 = v_0^2 + 2gh \Rightarrow 8^2 = 0 + 2 \cdot g \cdot 1,90$$

$$64 = 3,8g \Rightarrow g = \frac{64}{3,8} \approx 16,84 \text{ m/s}^2$$

b) **Velocidad de escape:** Radio $R = 8,60 \cdot 10^7$ m. Sabemos que $g = \frac{GM}{R^2}$, por lo que $GM = gR^2$. La velocidad de escape es $v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2gR}$.

$$v_e = \sqrt{2 \cdot 16,84 \cdot 8,60 \cdot 10^7} = \sqrt{2,896 \cdot 10^9} \approx 53818 \text{ m/s} \approx 53,8 \text{ km/s}$$

4. Ejercicio 4 - Castilla La Mancha (Saturno)

Datos: $R_S = 5,82 \cdot 10^7$ m, $M_S = 5,68 \cdot 10^{26}$ kg, $T_{\text{rot}} = 38040$ s (10h 34min).

Opción a) Gravedad y Velocidad de escape:

$$g_0 = \frac{GM}{R^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,68 \cdot 10^{26}}{(5,82 \cdot 10^7)^2} \approx 11,18 \text{ m/s}^2$$

Deducción v_e : Conservación de energía lanzando al infinito ($E_f = 0$). $\frac{1}{2}mv_e^2 - \frac{GMm}{R} = 0 \Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$.

$$v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,68 \cdot 10^{26}}{5,82 \cdot 10^7}} \approx 36080 \text{ m/s}$$

Opción b) Lanzamiento vertical: Punto 1: Altura $h_1 = 2R_S \Rightarrow r_1 = 3R_S$. $v_1 = 1000$ m/s. Punto 2: Parada ($v_2 = 0$). Distancia r_2 . Conservación de la energía:

$$\frac{1}{2}v_1^2 - \frac{GM}{r_1} = 0 - \frac{GM}{r_2}$$

$$\frac{GM}{r_2} = \frac{GM}{3R_S} - \frac{v_1^2}{2}$$

$$\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,68 \cdot 10^{26}}{r_2} = \frac{3,79 \cdot 10^{16}}{1,746 \cdot 10^8} - 5 \cdot 10^5 = 2,17 \cdot 10^8 - 5 \cdot 10^5 \approx 2,165 \cdot 10^8$$

$$r_2 = \frac{3,79 \cdot 10^{16}}{2,165 \cdot 10^8} \approx 1,75 \cdot 10^8 \text{ m}$$

Altura final: $h_{max} = r_2 - R_S = 1,75 \cdot 10^8 - 5,82 \cdot 10^7 \approx \mathbf{1,168 \cdot 10^8 \text{ m}}$ (116.800 km).

Opción c) Órbita Geoestacionaria (Saturno-estacionaria): Igualar fuerza gravitatoria y centrípeta con $\omega = 2\pi/T$:

$$\frac{GMm}{r^2} = m\omega^2 r \Rightarrow r^3 = \frac{GMT^2}{4\pi^2}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,68 \cdot 10^{26} \cdot (38040)^2}{4\pi^2}} \approx \sqrt[3]{1,388 \cdot 10^{24}} \approx 1,115 \cdot 10^8 \text{ m}$$

Altura: $h = r - R_S = 1,115 \cdot 10^8 - 0,582 \cdot 10^8 = \mathbf{5,33 \cdot 10^7 \text{ m}}$ (53.300 km).

5. Ejercicio 5 - Canarias (Lanzamiento Orbital)

Datos: $R_p = 3,01 \cdot 10^6 \text{ m}$, $M_p = 3,16 \cdot 10^{22} \text{ kg}$. Órbita 1: $h = 12000 \text{ km} \Rightarrow r_1 = 1,501 \cdot 10^7 \text{ m}$. Órbita 2: $r_2 = 1,35 \cdot 10^7 \text{ m}$ (El texto dice 13500 km .en torno a la Tierra”, asumimos que es el radio orbital en torno al mismo planeta por coherencia del problema).

a) Velocidad de lanzamiento (Energía aportada): Calculamos la energía necesaria para situarlo en órbita (diferencia de energías mecánicas): $E_{orb} - E_{sup} = \Delta E$. Si pide velocidad de ”disparo ideal desde superficie:

$$\frac{1}{2}mv_L^2 - \frac{GMm}{R_p} = -\frac{GMm}{2r_1}$$

$$v_L^2 = 2GM \left(\frac{1}{R_p} - \frac{1}{2r_1} \right) = 2 \cdot 2,107 \cdot 10^{12} (3,32 \cdot 10^{-7} - 3,33 \cdot 10^{-8})$$

$$v_L = \sqrt{4,21 \cdot 10^{12} \cdot 2,99 \cdot 10^{-7}} \approx \mathbf{1122 \text{ m/s}}$$

b) Energías en órbita:

$$E_c = \frac{GMm}{2r_1} = \frac{2,107 \cdot 10^{12} \cdot 900}{2 \cdot 1,501 \cdot 10^7} \approx \mathbf{6,32 \cdot 10^7 \text{ J}}$$

$$E_p = -2E_c = \mathbf{-1,26 \cdot 10^8 \text{ J}}$$

$$E_T = -E_c = \mathbf{-6,32 \cdot 10^7 \text{ J}}$$

c) Nueva órbita $r_2 = 13500 \text{ km}$: Velocidad orbital: $v = \sqrt{GM/r}$.

$$v_2 = \sqrt{\frac{2,107 \cdot 10^{12}}{1,35 \cdot 10^7}} \approx \mathbf{395 \text{ m/s}}$$

Periodo: $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \cdot 1,35 \cdot 10^7}{395} \approx \mathbf{2,15 \cdot 10^5 \text{ s}}$ (approx 59,7 horas).

6. Ejercicio 6 - Castilla y León (Exoplaneta y Satélite)

1) **Planeta K2-72:** $M' = 2,21M_T$; $R' = 1,29R_T$. a) **Fuerza sobre persona 70 kg:** Gravedad en superficie g' :

$$g' = \frac{GM'}{R'^2} = \frac{G(2,21M_T)}{(1,29R_T)^2} = \frac{2,21}{1,29^2} \left(\frac{GM_T}{R_T^2} \right) = \frac{2,21}{1,664} g_T \approx 1,328 g_T$$
$$g' \approx 1,328 \cdot 9,8 \approx 13,0 \text{ m/s}^2$$

Fuerza (Peso): $F = mg' = 70 \cdot 13,0 = \mathbf{910 \text{ N}}$.

b) **Altura donde** $g_h = 0,16g_{sup}$:

$$\frac{GM'}{(R' + h)^2} = 0,16 \frac{GM'}{R'^2} \Rightarrow \frac{1}{R' + h} = \frac{\sqrt{0,16}}{R'} = \frac{0,4}{R'}$$
$$R' = 0,4(R' + h) \Rightarrow 0,6R' = 0,4h \Rightarrow h = 1,5R'$$

2) **Satélite 1485 kg:** $E_m = -7,28 \cdot 10^{10} \text{ J}$. a) **Energías:** En órbita circular: $E_m = -E_c = E_p/2$.

$$E_c = -E_m = \mathbf{7,28 \cdot 10^{10} \text{ J}}$$

$$E_p = 2E_m = \mathbf{-1,46 \cdot 10^{11} \text{ J}}$$

b) **Velocidad y radio:**

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 7,28 \cdot 10^{10}}{1485}} \approx \mathbf{9901 \text{ m/s}}$$

$$E_p = -\frac{GM_T m}{r} \Rightarrow r = -\frac{GM_T m}{E_p} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \cdot 1485}{1,46 \cdot 10^{11}} \approx \mathbf{4,05 \cdot 10^6 \text{ m}}$$

(Nota: Este radio es menor que el terrestre $6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$, lo cual físicamente implicaría que orbita bajo la superficie. Revisa los datos del enunciado original, probablemente la energía dada sea menor en módulo o la masa diferente, pero matemáticamente el resultado es este).

7. Ejercicio 7 - Madrid (Exoplaneta y Plutón)

1) **Planeta G-876d:** Datos: $M_p = 6M_T$, $R_p = 1,73R_T$. Órbita $r = 3,14 \cdot 10^6 \text{ km} = 3,14 \cdot 10^9 \text{ m}$ (interpretando "3,14 10 kmz contexto astronómico como 10^6 km por órbita corta). Estrella $M_{est} = 6,37 \cdot 10^{29} \text{ kg}$. a) **Gravedad en superficie:**

$$g = \frac{G(6M_T)}{(1,73R_T)^2} = \frac{6}{1,73^2} g_T \approx 2,00 g_T \approx \mathbf{19,6 \text{ m/s}^2}$$

b) **Velocidad orbital y periodo:**

$$v = \sqrt{\frac{GM_{est}}{r}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6,37 \cdot 10^{29}}{3,14 \cdot 10^9}} \approx \mathbf{116300 \text{ m/s}}$$

$$T = \frac{2\pi r}{v} \approx \mathbf{1,70 \cdot 10^5 \text{ s}} \text{ (aprox 1,96 días)}$$

c) **Energía orbital:**

$$E = -\frac{GM_{est}M_p}{2r} \approx -2,42 \cdot 10^{35} \text{ J}$$

2) **Plutón:** $T = 248 \text{ años} = 7,82 \cdot 10^9 \text{ s}$. $e = 0,244$. a) **Afelio y Perihelio:** Calculamos semieje mayor a por Kepler 3: $a^3 = \frac{GM_{sol}T^2}{4\pi^2}$.

$$a = \sqrt[3]{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,99 \cdot 10^{30} \cdot (7,82 \cdot 10^9)^2}{4\pi^2}} \approx 5,91 \cdot 10^{12} \text{ m}$$

Perihelio: $r_p = a(1 - e) = 5,91 \cdot 10^{12}(0,756) \approx 4,47 \cdot 10^{12} \text{ m}$. Afelio: $r_a = a(1 + e) = 5,91 \cdot 10^{12}(1,244) \approx 7,35 \cdot 10^{12} \text{ m}$. b) **Velocidades:** Conservación momento angular ($r_a v_a = r_p v_p$) y Energía (Vis-viva): $v^2 = GM(2/r - 1/a)$.

$$v_p = \sqrt{GM \left(\frac{2}{r_p} - \frac{1}{a} \right)} \approx 6110 \text{ m/s}$$

$$v_a = \sqrt{GM \left(\frac{2}{r_a} - \frac{1}{a} \right)} \approx 3710 \text{ m/s}$$

8. Ejercicio 8 - Galicia (Satélite Geoestacionario)

2) **Aceleración gravitatoria:** Radio orbital $r = R_T + h = 6370 + 35786 = 42156 \text{ km} \approx 4,22 \cdot 10^7 \text{ m}$.

$$g = \frac{GM_T}{r^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{(4,22 \cdot 10^7)^2} \approx 0,224 \text{ m/s}^2$$

3) **Velocidad orbital:**

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}} = \sqrt{g \cdot r} \approx 3075 \text{ m/s}$$

Cuestión 3b): Si pierde masa, el periodo c) **no varía**. El periodo $T = 2\pi\sqrt{r^3/GM}$ depende de la masa del cuerpo central (M), no de la del satélite (m).

4.1) **Trabajo mínimo para situarlo en órbita:** Es la diferencia de energía mecánica (ignorando rotación terrestre para "mínimo trabajo" físico neto o considerándola si se pide lanzamiento práctico, aquí usamos el criterio energético puro).

$$W = E_{orb} - E_{sup} = -\frac{GMm}{2r} - \left(-\frac{GMm}{R_T} \right) = GMm \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2r} \right)$$

$$W = 4,0 \cdot 10^{14} \cdot 6100 \left(\frac{1}{6,37 \cdot 10^6} - \frac{1}{8,44 \cdot 10^7} \right) \approx 3,54 \cdot 10^{11} \text{ J}$$

4.2) **Velocidad de escape desde órbita:** Velocidad total para escapar ($E_m = 0$).

$$\frac{1}{2}mv_{esc}^2 - \frac{GMm}{r} = 0 \Rightarrow v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{2}v_{orb} \approx 4348 \text{ m/s}$$

9. Ejercicio 9 - Murcia (Puntos de Lagrange)

Datos: $d_{TL2} = 1,5 \cdot 10^9$ m. $d_{ST} = 1,5 \cdot 10^{11}$ m. Distancia Sol-L2: $r_{SL2} = 1,515 \cdot 10^{11}$ m.

a) Cociente de energías potenciales:

$$\frac{U_{Sol}}{U_{Tierra}} = \frac{-GM_S m / r_{SL2}}{-GM_T m / d_{TL2}} = \frac{M_S}{M_T} \cdot \frac{d_{TL2}}{r_{SL2}}$$
$$\text{Ratio} = \frac{2 \cdot 10^{30}}{6 \cdot 10^{24}} \cdot \frac{1,5 \cdot 10^9}{1,515 \cdot 10^{11}} = 3,33 \cdot 10^5 \cdot 0,0099 \approx \mathbf{3300}$$

La atracción potencial del Sol es predominante.

b) **Punto de campo nulo (entre Tierra y Sol):** Punto a distancia x de la Tierra, $(D - x)$ del Sol.

$$G \frac{M_T}{x^2} = G \frac{M_S}{(D - x)^2} \Rightarrow \frac{D - x}{x} = \sqrt{\frac{M_S}{M_T}} = \sqrt{3,33 \cdot 10^5} \approx 577$$

$$D - x = 577x \Rightarrow D = 578x \Rightarrow x = \frac{1,5 \cdot 10^{11}}{578} \approx \mathbf{2,59 \cdot 10^8 \text{ m}} \text{ (260.000 km de la Tierra)}$$