HOJA DE EJERCICIOS - NÚMEROS COMPLEJOS

1. Resolver las siguientes ecuaciones en el campo de los números complejos:
   (a) $x^2 - 2x + 2 = 0$
   (b) $x^2 + 3 = 0$
   (c) $x^2 - 2x + 4 = 0$
   (d) $x^2 + x + 1 = 0$

2. Completar la siguiente tabla (forma binómica):

COMPLEJO Z	$Re(z)$	$Im(z)$	OPUESTO $-Z$	CONJUGADO $\bar{Z}$
$z = 2 + 3i$	2	3	$-2 - 3i$	$2 - 3i$
$z = 3 - i$				
$z = 1 + i$				
$z = 3 - 3\sqrt{3}i$				

3. Dados los complejos $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = -1 + 4i$ y $z_3 = 2 - 5i$, hallar:
   (a) $z_1 + z_2 =$
   (b) $z_1 + z_3 =$
   (c) $z_1 - z_2 =$
   (d) $z_3 - z_2 =$
   (e) $3z_2 + 2z_3 =$

4. Calcular x e y para que $(2 + xi) + (y + 3i) = 7 + 4i$.

5. Calcular:
   (a) $(2 + 5i)(3 + 4i) =$
   (b) $(1 + 3i)(1 + i) =$
   (c) $(1 + i)(-1 - i) =$
   (d) $(2 - 5i)i =$
   (e) $(2 + 5i)(2 - 5i) =$
   (f) $(1 + i)(1 - i) =$
   (g) $(5 + 2i)(3 - 4i) =$
   (h) $(3 + 5i)^2 =$
   (i) $(1 + 3i)(1 - 3i) =$
   (j) $(-2 - 5i)(-2 + 5i) =$

6. ¿Cómo es siempre el producto de dos complejos conjugados? Razonar la respuesta.

7. Dados los complejos del ejercicio 3, hallar:
   (a) $z_1 \cdot z_2 =$

(b) $z_1 \cdot z_3 =$

(c) $z_3 - z_2 =$

(d) $z_1(z_3 + z_2) =$

(e) $z_1 - z_2 \cdot z_3 =$

(f) $(z_1)^2 =$

(g) $(z_1 - z_3)^2 =$

8. Dados los complejos $2 - mi$ y $3 - ni$, hallar m y n para que su producto sea $8 + 4i$.

9. Resolver la ecuación $(a + i)(b - 3i) = 7 - 11i$.

10. Calcular:

(a) $\frac{1+3i}{1+i} =$

(b) $\frac{2+5i}{3+4i} =$

(c) $\frac{1+i}{1-i} =$

(d) $\frac{3+5i}{1-i} =$

(e) $\frac{2-5i}{i} =$

(f) $\frac{20+30i}{3+i} =$

(g) $\frac{i}{3-2i} =$

(h) $\frac{1+i}{i} =$

(i) $\frac{1+2i}{2-i} =$

(j) $\frac{1-i}{2+3i} =$

11. Calcular el inverso de cada uno de los siguientes complejos:

(a) $3i$

(b) $1 + i$

(c) $2 + 3i$

12. Calcular las siguientes potencias sucesivas de i:

(a) $i^{12} =$

(b) $i^{77} =$

(c) $i^{125} =$

(d) $i^{723} =$

(e) $i^{2344} =$

(f) $\frac{1}{i} =$

(g) $\frac{1}{i^2} =$

(h) $\frac{1}{i^3} =$

13. Calcular las siguientes operaciones combinadas en forma binómica:

(a) $(2 + i)^3 =$

(b) $(1 + i)^3 =$

(c) $(2 - 3i)^3 =$

(d) $i^{-131} =$

(e) $\frac{i^7-1}{1+i} =$

(f) $\frac{2i-1}{i^{45}} + \frac{4-3i}{1+2i} =$

(g) $\frac{(3-2i)^2+(2-3i)^2}{i^{12}+i^{-5}} =$

(h) $\frac{(2+3i)(1-i)-(3+4i)^2}{2i^{14}-i^{-7}} =$

14. ¿Cuánto ha de valer m para que el complejo $z = (m - 2i)(2 + 4i)$ sea un número real? ¿E imaginario puro?

15. Determinar x para que el producto $z = (2 - 5i)(3 + xi)$ sea un número real.

16. Hallar x con la condición de que:

(a) $(x - 2i)^2$ sea un número imaginario puro.

(b) $(3x-2i)^2$ sea un número imaginario puro.

17. Hallar x e y de modo que $\frac{3-xi}{1+2i} = y + 2i$.

18. Hallar x para que el cociente $\frac{x+3i}{3+2i}$ sea un número imaginario puro.

19. Determinar k para que el cociente $z = \frac{-2+ki}{k-i}$ sea un número real.

20. Demostrar la siguiente igualdad: $\sqrt{1+\sqrt{3}i} + \sqrt{1-\sqrt{3}i} = \sqrt{6}$.

21. Hallar dos complejos de los que sabemos que su diferencia es un número real, su suma tiene la parte real igual a 1 y su producto es $-7+i$.

22. Determinar los valores de a y b para que el complejo $z = a+bi$ satisfaga la ecuación $z^2 = \bar{z}$.

23. Comprobar que los complejos $2 \pm 3i$ verifican la ecuación $x^2 - 4x + 13 = 0$.

24. Hallar una ecuación polinómica cuyas raíces sean:

    (a) $1 \pm 3i$

    (b) $5 \pm 2i$

25. Demostrar que si las raíces complejas de $Ax^2+Bx+C=0$ son $a \pm bi$, entonces $A[(x-a)^2 + b^2] = Ax^2 + Bx + C$.

26. Representar los siguientes complejos, sus opuestos y sus conjugados:

    (a) $z_1 = 3+4i$

    (b) $z_2 = 1-i$

    (c) $z_3 = -3+i$

    (d) $z_4 = -2-5i$

27. Pasar a forma polar los siguientes complejos:

(a) $4+4\sqrt{3}i$	(d) $-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$	(g) $1-i$	(j) $-i$
(b) $3-3\sqrt{3}i$	(e) $\sqrt{3}-i$	(h) $-1-i$	
(c) $-\sqrt{2}+i$	(f) $1+i$	(i) i	

28. Hallar m para que el número complejo $m+3i$ tenga módulo 5.

29. Hallar un número complejo tal que $|z| = 3$ e $Im(z) = -2$.

30. Hallar un número complejo del 2° cuadrante que tiene por módulo 2 y tal que $Re(z) = -1$.

31. Hallar un complejo de argumento 45° tal que sumado a $1+2i$ dé un complejo de módulo 5.

32. Encontrar un complejo tal que sumándolo con $1/2$ dé otro complejo de módulo $\sqrt{3}$ y argumento 60°.

33. Pasar a forma binómica:

(a) 4_{30°	(c) 2_{0°	(e) $2_{3\pi/2}$	(g) 1_{30°
(b) 4_{90°	(d) 5_{π}	(f) 1_{90°	(h) 2_{60°

34. Hallar los números complejos que corresponden a los vértices de un hexágono centrado en el origen con un vértice en $z_1 = 2_{0^\circ}$.

35. Determinar el valor de a para que el complejo $z = (3-6i)(2-ai)$ sea:
    (a) Un número real.
    (b) Un número imaginario puro.

36. Determinar el valor de m para que el complejo $z = \frac{2-mi}{8-6i}$ sea:
    (a) Un número real.
    (b) Imaginario puro.

37. Determinar el valor de a para que el complejo $z = (2+3i)(-2+ai)$ sea:
    (a) Un número real.
    (b) Un número imaginario puro.

38. Hallar:
    (a) Dado $z = 2_{45^\circ}$, hallar $\bar{z}$ en polar.
    (b) Dado $z = 1_{30^\circ}$, hallar $-z$.

39. Representar las siguientes regiones del plano complejo:
    (a) $Im(z) = -2$
    (b) $Re(z) = Im(z)$
    (c) $-1 < Re(z) \leq 3$
    (d) $Im(z) < 2$
    (e) $|z| = 5$
    (f) $|z| < 3$

40. **TEORÍA:**
    (a) Demostrar que $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$
    (b) Si $z = r_\alpha$, ¿qué relación tienen con z los números $r_{\alpha+180^\circ}$ y $r_{360^\circ-\alpha}$?
    (c) ¿El producto de dos complejos imaginarios puede ser real? Poner un ejemplo.

41. Dados los números complejos 3_{30° y 5_{60°, comprobar que el producto en forma polar y binómica dan el mismo resultado.

42. Efectuar las siguientes operaciones en forma polar y pasar a binómica:
    (a) $3_{45^\circ} \cdot 2_{15^\circ}$
    (b) $3_{150^\circ} \cdot 4_{45^\circ}$
    (c) $1_{33^\circ} \cdot 2_{16^\circ} \cdot 3_{41^\circ}$
    (d) $3_{12^\circ} \cdot 4_{17^\circ} \cdot 2_{1^\circ}$
    (e) $2_{106^\circ} : 1_{61^\circ}$

43. El complejo de argumento 80° y módulo 12 es el producto de dos complejos; uno de ellos tiene módulo 3 y argumento 50°. Escribir en forma binómica el otro complejo.

44. Efectuar las siguientes operaciones en forma polar y pasar a binómica:
    (a) $\frac{2_{15^\circ} \cdot 4_{135^\circ}}{8_{170^\circ}}$
    (b) $\frac{2_{15^\circ} \cdot (1+i)}{2_{-15^\circ} \cdot (1-i)}$

45. Hallar el valor de α para que el producto $3_{\pi/2} \cdot 1_\alpha$ sea un número real positivo.

46. Hallar el valor de α para que el cociente $5_\pi : 3_\alpha$ sea:

    (a) Un número real positivo.
    (b) Un número real negativo.
    (c) Un número imaginario puro con parte imaginaria positiva.

47. Sin efectuar el producto, hallar m para que $z = (m-2i)(2+4i)$ tenga módulo 10.

48. Sin efectuar el cociente, determinar a para que el módulo de $z = \frac{a+2i}{1-i}$ sea 2.

49. Hallar dos números complejos sabiendo que su producto es -8 y el cociente de uno entre el cuadrado del otro es la unidad.

50. Hallar dos números complejos sabiendo que su producto es 4 y el cociente de uno entre el cuadrado del otro es 2.

51. Interpretar geométricamente el resultado de multiplicar el complejo $z = r_\alpha$ por la unidad imaginaria i.

52. Calcular cos $75°$ y sin $75°$ mediante el producto $1_{30°} \cdot 1_{45°}$.

53. Calcular y dar el resultado en forma binómica:

    (a) $(1+i)^2$
    (b) $(2-2i)^2$
    (c) $(1+i)^3$
    (d) $(2+3i)^3$
    (e) $(1-i)^4$
    (f) $(-2+i)^5$
    (g) $\frac{(1+i)^2}{4+i}$
    (h) $\frac{2+i}{(1+i)^2}$
    (i) $(i^4 + i^{-13})^3$
    (j) $(1+i)^{20}$
    (k) $(-2+2\sqrt{3}i)^6$
    (l) $\frac{i^7 - i^{-7}}{2i}$
    (m) $(4-4\sqrt{3}i)^3$
    (n) $(-2+2\sqrt{3}i)^4$
    (o) $(\sqrt{3}-i)^5$
    (p) $(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3i}{2})^3$

54. Dados $z_1 = \sqrt{3} - i$ y $z_2 = 3i$, calcular:

    (a) $\frac{z_1+z_2}{1+i}$
    (b) $z_1 \cdot (1+i)$

55. Dado el complejo $z = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$, calcular $z^5 \cdot \bar{z}$.

56. Aplicando la fórmula de De Moivre, hallar:

    (a) sin 3α y cos 3α
    (b) sin 4α y cos 4α

57. Calcular las siguientes raíces y representarlas:

    (a) $\sqrt[4]{1+i}$
    (b) $\sqrt[3]{1-i}$
    (c) $\sqrt[4]{\frac{-4}{1-\sqrt{3}i}}$
    (d) $\sqrt[3]{\frac{-1+3i}{2-i}}$
    (e) $\sqrt[3]{-i}$
    (f) $\sqrt[3]{-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i}$

(g) $\sqrt{i}$

(h) $\sqrt[3]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$

(i) $\sqrt[3]{8i}$

(j) $\sqrt[4]{-1}$

(k) $\sqrt[3]{8}$

(l) $\sqrt[4]{-2+2\sqrt{3}i}$

(m) $\sqrt[3]{4-4\sqrt{3}i}$

(n) $\sqrt[3]{\frac{8+8i}{1-i}}$

58. **TEORÍA:**

    (a) El número $4+3i$ es la raíz cuarta de un complejo z; hallar las otras tres raíces.

    (b) ¿Pueden ser $2+i, -2+i, -1-2i$ y $1-2i$ las raíces cuartas de un complejo?

    (c) ¿Pueden ser $2_{28^\circ}, 2_{100^\circ}, 2_{172^\circ}, 2_{244^\circ}$ y 2_{316° las raíces de un complejo?

59. Hallar las raíces de la unidad y dibujarlas:

    (a) Raíces cúbicas de la unidad en forma binómica.

    (b) Raíces cuartas de la unidad en forma binómica.

60. Resolver las siguientes ecuaciones en el campo de los complejos:

    (a) $x^3+8=0$

    (b) $x^4-16=0$